PROYEKSI ORTOGONAL PADA RUANG HILBERT ℓ^2

Skripsi

**Diajukan Kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
Guna Memenuhi Gelar Sarjana Sains**

Disusun oleh :

Lucie Suparintina

(06305144025)

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2011

PERSETUJUAN

SKRIPSI

PROYEKSI ORTOGONAL PADA RUANG HILBERT $\boldsymbol{\ell}^2$

Telah Disetujui dan Disyahkan pada Tanggal ………. Januari 2011
untuk Dipertahankan di depan Panitia Penguji Skripsi
Program Studi Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

Mengetahui,

Dosen Pembimbing I	**Dosen Pembimbing II**
R. Rosnawati, M.Si	**Emut, M.Si**
NIP. 19671220 199203 2 001	**NIP. 19621215 198812 1 001**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama Mahasiswa	: Lucie Suparintina
NIM	: 06305144025
Jurdik / Prodi	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Judul TAS	: Proyeksi Ortogonal pada Ruang Hilbert ℓ^2

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya, tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di perguruan tinggi lain kecuali pada bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan.

Apabila ternyata terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggungjawab saya.

Yogyakarta, Januari 2011

Yang Menyatakan

Lucie Suparintina
NIM. 06305144025

PENGESAHAN

SKRIPSI
PROYEKSI ORTOGONAL PADA RUANG HILBERT ℓ^2

Disusun oleh :
Lucie Suparintina
06305144025

Telah Dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta

Pada tanggal …………………. dan dinyatakan telah memenuhi syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains.

Dewan Penguji

Nama	Jabatan	Tandatangan	Tanggal
R. Rosnawati, M.Si	Ketua Penguji	……………...	…………..
Emut, M.Si	Sekretaris Penguji	………………	…………..
Caturiyati, M.Si	Penguji Utama	………………	…………..
Himmawati P.L, M.Si	Penguji Pendamping	………………	…………..

Yogyakarta,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Dekan,

Dr. Ariswan
NIP. 19590914 198803 1 003

MOTTO

”Hidup adalah rintangan yang harus dihadapi, perjuangan yang harus dimenangkan, ilmu yang harus dipelajari, dan anugerah yang harus disyukuri”

“Jangan pernah berpikir untuk menjadi yang terbaik, tapi berpikirlah untuk dapat melakukan yang terbaik”

“Tugas kita bukanlah untuk berhasil, tapi tugas kita adalah untuk mencoba karena didalam mencoba itulah kita menemukan dan belajar membangun kesempatan untuk berhasil”(Mario Teguh)

“Doa tanpa usaha adalah sia-sia, usaha tanpa doa adalah sombong”

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, karya kecil ini ingin kupersembahan untuk :

Keluargaku Tercinta

Ayah dan Ibu, serta adikku terima kasih atas doa yang senantiasa menyertai setiap langkahku serta segala pengorbanan yang selama ini diberikan untukku.

Suhadi's family; om Hadi, tante Tini, mbak Ega, Nda-nda, Sasa terima kasih sudah bersedia menjadi orang tua kedua serta saudara-saudaraku selama di Jogja.

Guru-guruku

Terima kasih atas segala ilmu yang telah diberikan, semoga kelak ilmu tersebut berguna bagi nusa, bangsa, dan agama.

Sahabat-sahabatku

Aris, (cumi-cumi : Ayomi, Atri, Dina), Arif, Mujek, Mbak Nana, Dhemy, Titin, Ika, Dewi, Puguh, Susi, Vita, Mbak Mala. Terimakasih karena kalian tidak pernah bosan mengingatkanku dan selalu setia mendengarkan keluh kesahku.

Teman-teman Seperjuangan

Teman-teman Math NR'06 dan Math R'06, serta teman-teman kelas Matematika Terapan. Terimakasih atas persahabatan serta persaudaraan yang hangat dan memberikan kenangan tak terlupakan.

PROYEKSI ORTOGONAL PADA RUANG HILBERT $\boldsymbol{\ell^2}$

Oleh
Lucie Suparintina
06305144025

ABSTRAK

Suatu proyeksi ortogonal merupakan kasus khusus dari suatu operator linear. Skripsi ini bertujuan untuk mengetahui secara teoritis mengenai proyeksi ortogonal yang berlaku pada ruang Hilbert serta mengetahui sifat-sifat yang berhubungan dengan proyeksi ortogonal.

Operator linear pada ruang Hilbert merupakan suatu transformasi linear yang memetakan suatu ruang Hilbert ke dirinya sendiri yang memenuhi operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Operator linear terbatas pada ruang Hilbert $P: H \to H$ berlaku suatu *direct sum* $H = Y \oplus Y^{\perp}$, dengan Y merupakan subruang tertutup pada ruang Hilbert dan $Y^{\perp}$ merupakan komplemen ortogonal dari Y dinamakan proyeksi ortogonal H pada Y sepanjang $Y^{\perp}$ dan untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ dapat dinyatakan secara tunggal $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dan $\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Y^{\perp}$ sehingga berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

Proyeksi ortogonal yang berlaku pada ruang Hilbert H merupakan suatu operator linear terbatas $P: H \to H$ yang memiliki sifat idempoten dan *self-adjoint*. Idempoten artinya jika operator linear tersebut dikalikan dengan dirinya sendiri maka hasilnya adalah operator linear itu sendiri, dinotasikan dengan $P^2 = P$. Sedangkan, *self-adjoint* artinya jika operator linear tersebut dinyatakan dalam suatu *inner product* maka berlaku $\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$. Proyeksi ortogonal P pada ruang Hilbert H merupakan kasus khusus dari operator linear, sehingga berlaku $\mathrm{range}(P)$ dan $\ker(P)$ yang merupakan subruang tertutup pada ruang Hilbert. Oleh karena itu, range dan kernel pada ruang Hilbert dapat dinyatakan dalam *direct sum* $H = \mathrm{range}(P) \oplus \ker(P)$.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul *"Proyeksi Ortogonal pada Ruang Hilbert* ℓ^2*"* ini.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta. Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak karena individu semata, tetapi karena bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih atas waktu, saran serta bimbingan yang telah diberikan oleh :

1. Bapak Dr. Ariswan, selaku Dekan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta atas ijin yang diberikan untuk melakukan penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Hartono, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.
3. Ibu Atmini Dhoruri M.S, selaku Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.
4. Ibu Karyati, M.Si, selaku Dosen Penasehat Akademik yang telah memberikan bimbingan kepada penulis selama masa studi.

5. Ibu R. Rosnawati, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang telah dengan sabar membimbing penulis dan selalu memberikan pengarahan dalam penulisan skripsi.
6. Bapak Emut, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan saran serta bimbingannya.
7. Ibu Caturiyati, M.Si, selaku Dosen Penguji I yang telah memberikan saran serta bimbingannya.
8. Ibu Himmawati Puji Lestari, M.Si, selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan saran serta bimbingannya.
9. Seluruh staf dan karyawan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan bantuan dan kemudahan dalam penyusunan skripsi ini.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan, yang telah memberikan bantuan moral, material, dan spiritual baik secara langsung maupun tidak langsung.

Semoga amalan mereka diterima oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang sesuai. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca pada umumnya serta bagi penulis pada khususnya.

Yogyakarta, Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL / LAMBANG

$\mathbb{C}$	: Himpunan semua bilangan kompleks
$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	: Jarak dari $\boldsymbol{x}$ ke $\boldsymbol{y}$
$\{x_n\}$	: Barisan sebanyak *n*
$\ker(P)$	: Kernel dari suatu operator linear *P*
ℓ^2	: Ruang barisan
$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli
P^{-1}	: Invers dari suatu operator linear *P*
P^*	: Operator *adjoint* dari operator linear *P*
$\|P\|$	: Norma dari operator linear *P*
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan real
$\mathbb{R}^n$	: Ruang- *n* Euclid
$\mathrm{range}(P)$	: Range dari suatu operator linear *P*
$\|\{x_n\}\|$	: Nilai mutlak barisan
$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$	: $\boldsymbol{x}$ ortogonal terhadap $\boldsymbol{y}$
$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$	: *Inner product* dari $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$
$\|\boldsymbol{x}\|$	: Norma dari $\boldsymbol{x}$
$Y^{\perp}$	: Komplemen ortogonal dari *Y*
$Y \oplus Z$	: *Direct sum* dari subruang Y dan *Z*
$\boldsymbol{\theta}$	: Vektor Nol

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan, dan kuantitas. Struktur aljabar merupakan salah satu cabang matematika abstrak yang umumnya lebih sulit dibandingkan dengan cabang matematika lain yang lebih konkret. Struktur aljabar adalah ilmu yang mempelajari suatu himpunan dengan satu atau lebih operasi biner yang diberlakukan pada sistem aljabar tersebut (Wahyudin, 1989). Struktur aljabar merupakan bagian penting dalam ilmu matematika yang menjadi dasar aplikasi ilmu matematika. Oleh karena itu, struktur aljabar berperan cukup besar dalam konsep-konsep dasar matematika terutama tentang teori-teori atau dasar-dasar dari aljabar maupun analisis secara umum antara lain meliputi teori bilangan, topologi, dasar-dasar analisis fungsional, fungsi bilangan real, serta teori grup aljabar linear.

Himpunan merupakan suatu kumpulan dari objek-objek yang didefinisikan dengan jelas dan objeknya dinamakan elemen atau anggota dari himpunan tersebut, misalnya himpunan bilangan real, himpunan bilangan bulat, himpunan barisan, dan sebagainya. Himpunan merupakan konsep penting dan mendasar yang membangun segala aspek dari matematika. Konsep dari himpunan yang menghubungkan elemen-elemen pada suatu himpunan adalah pemetaan atau fungsi. Konsep pemetaan sangat penting dalam matematika khususnya aljabar, yaitu salah satunya untuk mempelajari suatu transformasi linear. Suatu himpunan barisan dapat menjadi ruang vektor jika himpunan tersebut dilengkapi operasi penjumlahan dan perkalian skalar dan memenuhi semua aksioma yang berlaku pada ruang vektor. Di dalam suatu ruang vektor barisan atau ruang vektor ℓ^2, transformasi linear merupakan suatu pemetaan yang memetakan suatu ruang vektor ke ruang vektor lainnya dan memenuhi operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Suatu kasus khusus dari transformasi linear dimana suatu ruang dipetakan ke dirinya sendiri dinamakan operator linear.

Berkaitan dengan operator linear, suatu proyeksi ortogonal merupakan kasus khusus dari suatu operator linear. Proyeksi ortogonal merupakan suatu konsep yang diperoleh dengan memperhatikan sifat operator linear di dalam suatu ruang *pre*-Hilbert. Misalkan, terdapat dua buah proyeksi pada ruang *pre*-Hilbert yaitu proyeksi ortogonal dan proyeksi yang tidak ortogonal. Suatu proyeksi ortogonal merupakan operator linear yang berlaku suatu *direct sum* dari dua buah subruang *pre*-Hilbert yang saling ortogonal. Sedangkan, proyeksi yang tidak ortogonal merupakan suatu operator linear yang berlaku suatu *direct sum* dari dua buah subruang *per*-Hilbert yang tidak saling ortogonal.

Selanjutnya, suatu ruang *pre*-Hilbert dinamakan ruang Hilbert jika untuk setiap barisan Cauchy yang ada di dalamnya merupakan barisan konvergen. Di dalam ruang Hilbert berlaku juga konsep proyeksi ortogonal, tetapi konsepnya menjadi lebih luas. Proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert konsepnya sama halnya dengan proyeksi ortogonal pada ruang *pre*-Hilbert, yaitu suatu operator linear terbatas pada ruang Hilbert yang berlaku *direct sum* dari subruang tertutup dengan komplemen ortogonalnya pada ruang Hilbert.

Proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert juga merupakan kasus khusus dari suatu operator linear pada ruang Hilbert. Oleh karena itu, sifat-sifat yang berlaku pada proyeksi ortogonal di ruang Hilbert berhubungan dengan sifat-sifat yang berlaku pada operator linear di ruang Hilbert.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah diatas, dapat dirumuskan pokok permasalahan yang akan menjadi kajian dari skripsi ini, yaitu bagaimana sifat-sifat proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert ℓ^2?

C. Pembatasan Masalah

Dalam penulisan skripsi ini permasalahan dibatasi pada masalah kajian teoritis tentang proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert ℓ^2 serta sifat-sifat suatu proyeksi ortogonal untuk operator linear yang *self-adjoint*.

D. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk menjelaskan bagaimana sifat-sifat proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert ℓ^2.

E. Manfaat Penulisan

Dari hasil penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberi informasi secara teoritis tentang proyeksi orthogonal di ruang Hilbert ℓ^2, serta untuk mengetahui sifat-sifat yang berhubungan dengan proyeksi ortogonal di ruang Hilbert ℓ^2.

BAB II

DASAR TEORI

Dalam bab II ini akan membahas pengertian-pengertian dasar yang digunakan sebagai landasan pembahasan pada bab selanjutnya yang dinyatakan dengan definisi, contoh, proposisi, dan teorema. Pengertian-pengertian dasar yang dimaksud adalah himpunan, pemetaan, ruang vektor, transformasi linear, *pre*-Hilbert, proyeksi ortogonal, serta kekonvergenan dan kelengkapan.

A. Himpunan

Himpunan yang dibahas di sini dimaksudkan sebagai suatu kumpulan dari objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek yang termasuk dalam himpunan itu disebut anggota (elemen) dari himpunan itu. Umumya suatu himpunan dinotasikan dengan huruf kapital $A, B, C, \ldots$ dan anggota dari suatu himpunan dinotasikan dengan huruf latin $, b, c, \ldots$.

Misalkan X adalah himpunan dan a anggota dari X. Penulisan $a \in X$ berarti a merupakan anggota dari X. Sebaliknya, penulisan $a \notin X$ berarti a bukan anggota dari X. Dalam hal ada anggota a yang memenuhi $a \in X$, maka dikatakan bahwa X mempunyai anggota, atau himpunan tak kosong. Sebaliknya, jika himpunan X tidak mempunyai anggota, maka himpunan X dinamakan himpunan kosong dan dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\quad\}$.

Untuk menuliskan suatu himpunan, terdapat beberapa cara dalam penulisan yang umum digunakan, yaitu:

1. Dengan mendaftar anggota-anggotanya.

   Contoh 2.1:

   $$X = \{a, b, c\}.$$

   Artinya, X merupakan himpunan dengan anggota-anggotanya $a, b,$ dan c.

2. Dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan.

   Contoh 2.2:

   $$X = \{a | a \in \mathbb{R}, a > 0\}.$$

   Artinya, X merupakan himpunan bilangan real positif.

3. Dengan menggunakan kata-kata atau dengan menyatakan sifat-sifat yang dipenuhi oleh anggota-anggotanya.

   Contoh 2.3:

   X = Himpunan bilangan bulat positif.

Dalam hubungan antara dua buah himpunan terdapat pengertian mengenai himpunan bagian, himpunan yang sama dan himpunan sejati. Berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi dari hal-hal tersebut.

Definisi 2.1 : (Arifin, 2000: 2)

Himpunan X disebut himpunan bagian dari himpunan Y jika untuk setiap $x \in X$ berlaku $x \in Y$ dan dinotasikan dengan $X \subseteq Y$.

Selanjutnya, berdasarkan definisi di atas himpunan bagian dari himpunan Y yang paling besar adalah dirinya sendiri, dalam hal ini X dan Y mempunyai anggota sama. Dengan demikian, persamaan dua himpunan dapat dinyatakan dengan menggunakan definisi himpunan bagian sebagai berikut.

Definisi 2.2 : (Arifin, 2000 : 2)

Dua himpunan X dan Y dikatakan sama jika $X \subseteq Y$ dan $Y \subseteq X$, dinotasikan dengan $X = Y$.

Dari definisi di atas, himpunan X dan Y dikatakan berbeda jika terdapat $a \in X$ tetapi $a \notin X$ atau sebaliknya, dinotasikan dengan $X \neq Y$.

Definisi 2.3 : (Arifin, 2000 : 2)

Himpunan X dinamakan himpunan bagian sejati dari Y jika $X \subseteq Y$ dan $X \neq Y$, dinotasikan dengan $X \subset Y$.

Contoh 2.4:

Misalkan X = himpunan bilangan prima dan Y = himpunan bilangan asli, maka X merupakan himpunan bagian sejati dari Y atau $X \subset Y$.

Selanjutnya, misalkan dua buah himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari X maka dapat dibentuk himpunan baru. Berikut ini akan dijelaskan mengenai hal-hal tersebut, yaitu gabungan, gabungan, irisan, dan selisih dua buah himpunan.

Definisi 2.4 : (Arifin, 2000 : 3)

a. Gabungan himpunan A dan himpunan B didefinisikan dengan:

$$A \cup B = \{a | a \in A \text{ atau } a \in B\}.$$

Artinya, a dinamakan anggota dari gabungan himpunan A dan himpunan B jika a sekurang-kurangnya menjadi anggota dari salah satu himpunan A atau himpunan B.

b. Irisan himpunan A dan himpunan B didefinisikan dengan:

$$A \cap B = \{a | a \in A \; dan \; a \in B\}.$$

Artinya, a dinamakan anggota dari irisan himpunan A dan himpunan B jika a menjadi anggota dari himpunan A sekaligus anggota himpunan B.

c. Selisih himpunan A dan himpunan B didefinisikan dengan:

$$A - B = \{a | a \in A \; dan \; a \notin B\}.$$

Artinya, a dinamakan anggota dari selisih himpunan A dan himpunan B jika a menjadi anggota dari himpunan A tetapi a tidak berada dalam himpunan B.

Selanjutnya, cara lain untuk membentuk himpunan adalah dengan hasil kali silang dan jumlah dari dua buah himpunan seperti yang akan dijelaskan dalam definisi berikut ini.

Definisi 2.5 : (Arifin, 2000 : 4)

Hasil kali silang himpunan A dan B adalah himpunan semua pasangan (a, b) maka berlaku:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \, , b \in B\}.$$

Artinya, untuk setiap a anggota dari himpunan A dan b anggota dari himpunan B dapat dibentuk pasangan (a, b).

Definisi 2.6: (Arifin, 2001: 44)

Jumlahan dari himpunan A dan himpunan B didefinisikan dengan:

$$A + B = \{a + b | a \in A \ dan \ b \in B\}.$$

Artinya, $a + b$ dinamakan anggota dari jumlahan himpunan A dan himpunan B jika a menjadi anggota dari himpunan A dan b anggota himpunan B.

B. Pemetaan

Untuk membandingkan dua buah himpunan, dibutuhkan cara agar setiap elemen-elemennya dapat dihubungkan. Pemetaan dapat dilihat sebagai cara untuk membandingkan, yaitu melalui pengaitan antara unsur-unsur pada himpunan satu dengan unsur-unsur pada himpunan yang lain.

Definisi 2.7 : (Arifin, 2000 : 6)

Misalkan diketahui dua himpunan S dan T yang keduanya tak kosong. Pemetaan f dari S ke dalam T, ditulis $f: S \to T$ adalah suatu cara yang mengaitkan setiap $x \in S$ dengan tepat satu $y \in T$ dan dinotasikan dengan $f: x \longmapsto y$.

Berdasarkan definisi di atas, pengaitan $f: x \longmapsto y$ untuk setiap $x \in S$ akan mendefinisikan pemetaan $f: S \to T$ jika hanya jika setiap $x \in S$ dikaitkan dengan suatu $y \in T$. Himpunan semua elemen T yang merupakan peta dari elemen-elemen S dinamakan daerah hasil (range) dari pemetaan f dan dinyatakan dengan $f(x)$, sehingga

$$f(x) = \{y | y \in T, y = f(x) \text{ untuk setiap } x \in S\}.$$

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat contoh berikut.

Contoh 2.5 :

Misalkan S = himpunan semua bilangan asli, T = himpunan semua bilangan bulat. Pemetaan $f: S \rightarrow T$ ditentukan (didefinisikan) oleh $f(x) = 3x, \forall\, x \in S$. Maka daerah hasil dari f adalah $f(S) = \{3x | x \in S\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$. Pada pemetaan ini, ada elemen-elemen T yang bukan merupakan peta dari eleman S, misalnya …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …Tetapi, semua elemen S pasti mempunyai peta di T.

Berikut ini akan dijelaskan beberapa pemetaan yang memiliki keistimewaan, yaitu pemetaan injektif, pemetaan surjektif, dan pemetaan bijektif.

Definisi 2.8 : (Arifin, 2000 : 8)

Pemetaan $f: S \rightarrow T$ dikatakan injektif jika untuk setiap x_1 dan x_2 di S yang dipetakan oleh f terhadap T, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ maka berlaku $x_1 = x_2$.

Definisi 2.9: (Arifin, 2000 : 8)

Pemetaan $f: S \rightarrow T$ dikatakan surjektif, jika untuk setiap $y \in T$ terdapat $x \in S$ yang memenuhi $f(x) = y$.

Selanjutnya, suatu pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif dinamakan pemetaan bijektif seperti yang akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.10: (Arifin, 2000 : 8)

Pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif dinamakan pemetaan bijektif atau koresponden 1-1.

Suatu barisan dalam suatu himpunan S adalah suatu pemetaan atau fungsi dengan domain himpunan bilangan asli dan range berada dalam himpunan S. Untuk lebih memahami definisi suatu barisan dapat dilihat pada penjelasan berikut.

Definisi 2.11: (Bartle & Sherbert, 1927: 53)

Suatu barisan bilangan real atau barisan dalam $\mathbb{R}$ adalah suatu pemetaan $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.. Elemen-elemen dari suatu barisan dinotasikan dengan x_n dengan $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.6:

Barisan bilangan asli genap dapat didefinisikan oleh suatu pemetaan $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(n) = 2n, n \in \mathbb{N}$$

maka diperoleh

$$x_1 = 2, x_2 = 4, \dots$$

atau

$$\{x_n\} = (2, 4, 6, \dots).$$

Berikut ini adalah teorema yang menjelaskan tentang hubungan dua barisan. Teorema tersebut lebih dikenal dengan nama ketaksamaan Minkowski.

Teorema 2.2 : Ketaksamaan Minkowski (Debnath, 1999: 6)

Misalkan $p \geq 1$. Untuk sebarang dua barisan pada bilangan real $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ berlaku

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\{x_n\}+\{y_n\}\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\{x_n\}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\{y_n\}\right|^p\right)^{1/p}.$$

Bukti :

Untuk $p = 1$, cukup menggunakan ketaksamaan segitiga yang berlaku pada nilai mutlak suatu barisan. Jika $p > 1$, maka terdapat q sedemikian sehingga $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Kemudian berlaku

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\{x_n\}+\{y_n\}\right|^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\{x_n\}+\{y_n\}\right|\left|\{x_n\}+\{y_n\}\right|^{p-1}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\{x_n\}+\{y_n\}|\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\{x_n\}+\{y_n\}|^{p-1}\right), \qquad (2.1)$$

dari persamaan (2.1), dengan menggunakan ketaksamaan segitiga yang berlaku pada nilai mutlak maka diperoleh

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\{x_n\}|+|\{y_n\}|\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\{x_n\}+\{y_n\}|^{p-1}\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\}||\{x_n\} + \{y_n\}|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |\{y_n\}||\{x_n\} + \{y_n\}|^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\}|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\} + \{y_n\}|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\{y_n\}|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\} + \{y_n\}|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

Jika $q(p-1) = p$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\{x_n\} + \{y_n\}\right|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\{y_n\}\right|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\{x_n\} + \{y_n\}\right|^p\right)^{1/q},$$

yang merupakan ketaksamaan Minkowski. Jadi, teorema tersebut terbukti. ■

C. Ruang Vektor

Misalkan S menyatakan suatu himpunan tak kosong. Operasi $*$ pada S dinamakan operasi biner, yaitu jika berlaku suatu pemetaan

$$* : S \times S \longrightarrow S.$$

Operasi biner dapat pula dikatakan sebagai operasi $*$ pada S yang bersifat tertutup. Artinya, jika untuk setiap $a, b \in S$ maka berlaku juga pada $a * b \in S$.

Berikut akan dijelaskan mengenai contoh dari operasi biner dan bukan operasi biner.

Contoh 2.7 :

Misalkan B adalah himpunan semua bilangan bulat. Operasi penjumlahan pada B merupakan operasi biner karena jumlah dua buah bilangan bulat adalah suatu bilangan bulat pula.

Contoh 2.8 :

Operasi pembagian pada B bukan merupakan operasi biner pada B karena ada $(a, b) \in B \times B$ sedemikian sehingga $(a: b) \notin B$. Misalkan $(5,7) \in B \times B$ maka $(5: 7) \notin B$.

Selanjutnya, berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi dari lapangan real yang memiliki kaitan dengan operasi biner.

Definisi 2.12: (Arifin, 2001: 2)

Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan dua operasi seperti berikut:

Operasi penjumlahan:

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$+ : \ (a, b) \longmapsto a + b$

Operasi perkalian :

$\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\circ : (a, b) \longrightarrow ab$

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan dua operasi atau $(\mathbb{R}, +, \circ)$ disebut lapangan bilangan real jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. Terhadap operasi penjumlahan memenuhi hubungan sebagai berikut.
   a. $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ (komutatif)
   b. $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ (asosiatif)
   c. Terdapat suatu $0 \in \mathbb{R}$ yang berlaku $a + 0 = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ dan 0 dinamakan elemen nol.
   d. Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ terdapat suatu $-a \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $a + (-a) = 0$ dan $-a$ dinamakan invers dari a terhadap operasi penjumlahan.
2. Terhadap operasi perkalian memenuhi hubungan sebagai berikut.
   a. $ab = ba$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ (komutatif)
   b. $(ab)c = a(bc)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ (asosiatif)
   c. Terdapat $1 \in \mathbb{R}$ yang tidak sama dengan 0 dan memenuhi $a1 = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ dan 1 dinamakan elemen kesatuan.
   d. Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ yang tidak sama dengan 0 terdapat unsur $a^{-1} \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $aa^{-1} = 1$ dan a^{-1} disebut invers dari a terhadap operasi perkalian.
3. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku $a(b + c) = ab + bc$ (distributif)

Secara umum, misalkan terdapat suatu himpunan tak kosong dan suatu lapangan bilangan real maka diperoleh definisi suatu ruang vektor sebagai berikut.

Definisi 2.13: (Anton, 1987: 137)

Suatu ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$ adalah suatu himpunan V tak kosong yang dilengkapi dua buah operasi. Operasi pertama dinamakan penjumlahan vektor yang menghubungkan setiap vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ di V dan dinotasikan $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Operasi kedua dinamakan perkalian skalar yang menghubungkan setiap vektor $\boldsymbol{x}$ di V dan setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ dan dinotasikan $\alpha\boldsymbol{x}$. Kedua operasi tersebut harus memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Untuk setiap $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ di V maka $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ juga di V.
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ di V (aturan komutatif dari penjumlahan vektor)
3. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{z}$ di V (aturan asosiatif dari penjumlahan vektor)
4. Terdapat vektor tunggal $\boldsymbol{\theta}$, dinamakan vektor nol sedemikian sehingga $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x}$ di V.
5. Untuk setiap $\boldsymbol{x}$ di V, terdapat vektor tunggal $-\boldsymbol{x}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}$.
6. Jika $\boldsymbol{x}$ di V dan $\alpha \in \mathbb{R}$ maka $\alpha\boldsymbol{x}$ juga di V.
7. $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan setiap $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ di V.
8. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$, untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan setiap $\boldsymbol{x}$ di V.
9. $(\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta\boldsymbol{x})$, untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan setiap $\boldsymbol{x}$ di V.

10. Untuk setiap $\boldsymbol{x}$ di V, terdapat 1 sedemikian sehingga $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x}$ di V.

Suatu himpunan yang dilengkapi oleh dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan dan perkalian skalar dapat berperan sebagai ruang vektor jika memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku pada ruang vektor. Berikut ini adalah salah satu contoh dari ruang vektor.

Contoh 2.9 :

Misalkan suatu himpunan barisan bilangan real $\ell^2 = \left\{\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2 < \infty\right\}$, ℓ^2 dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar $k \in \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$$

$$k\{\alpha_n\} = k(x_1, x_2, x_3, \dots) = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots).$$

Akan dibuktikan bahwa ℓ^2 adalah suatu ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$.

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan bahwa ℓ^2 yang dilengkapi oleh dua operasi penjumlahan dan perkalian skalar memenuhi semua aksioma.

1. Misalkan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in \ell^2$, dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $\{\beta_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ maka berlaku

$$\begin{aligned}\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} &= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots).\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$ berada di ℓ^2. Untuk setiap $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots), \{\beta_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$ sedemikian sehingga berlaku $\sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2 < \infty$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} |\{\beta_n\}|^2 < \infty$ berada di ℓ^2 maka berdasarkan ketaksamaan Minkowski diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\{\beta_n\}|^2 < \infty + \infty < \infty,$$

sehingga $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$ tertutup terhadap penjumlahan.

2. Misalkan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in \ell^2$, dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $\{\beta_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ maka berlaku

$$\begin{aligned}
\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} &= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) \\
&= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3, \dots)
\end{aligned}$$

(karena $\{\alpha_n\}$ dan $\{\beta_n\}$ merupakan barisan bilangan real maka untuk setiap $x_1, y_1, \dots \in \mathbb{R}$ berlaku $x_1 + y_1 = y_1 + x_1 = \dots \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
&= (y_1, y_2, y_3, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots) \\
&= \{\beta_n\} + \{\alpha_n\}.
\end{aligned}$$

Jadi, $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\beta_n\} + \{\alpha_n\}$ (bersifat komutatif)

3. Misalkan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in \ell^2$, akan ditunjukkan bahwa $(\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}) + \{\gamma_n\} = \{\alpha_n\} + (\{\beta_n\} + \{\gamma_n\})$ maka berlaku

$$(\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}) + \{\gamma_n\} = \big((x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots)\big)$$
$$+(z_1, z_2, z_3, \dots)$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) + (z_1, z_2, z_3, \dots)$$
$$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3, \dots)$$
$$= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3, \dots)$$
$$= (x_1, x_2, x_3, \dots)$$
$$+\big((y_1, y_2, y_3, \dots) + (z_1, z_2, z_3, \dots)\big)$$
$$= \{\alpha_n\} + (\{\beta_n\} + \{\gamma_n\}).$$

Jadi, terbukti bahwa $(\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}) + \{\gamma_n\} = \{\alpha_n\} + (\{\beta_n\} + \{\gamma_n\})$. (bersifat asosiatif)

4. Ambil $\boldsymbol{\theta} = (0,0,0, \dots) \in \ell^2$ maka untuk setiap $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ berlaku :

$$\{\alpha_n\} + \boldsymbol{\theta} = (x_1, x_2, x_3, \dots) + (0,0,0, \dots)$$
$$= (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0, \dots)$$
$$= (x_1, x_2, x_3, \dots)$$
$$= \{\alpha_n\}.$$

sehingga $\{\alpha_n\} + \boldsymbol{\theta} = \{\alpha_n\}$. Oleh karena itu, $\boldsymbol{\theta}$ merupakan vektor nol dalam ℓ^2.

5. Untuk setiap $\{\alpha_n\} \in \ell^2$, dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ maka terdapat $\{-\alpha_n\} \in \ell^2$ sedemikian sehingga $\{-\alpha_n\} = -\{\alpha_n\}$ maka diperoleh

$$(\{\alpha_n\} + \{-\alpha_n\}) = (x_1, x_2, x_3, \dots) + (-x_1, -x_2, -x_3, \dots)$$
$$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3, \dots)$$

$$= (0,0,0,\dots) = \boldsymbol{\theta}.$$

Oleh karena itu,$\left(\{\alpha_n\} + \left\{-\alpha_n\right\}\right) = \boldsymbol{\theta}$.

6. Misalkan $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan skalar $k \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga maka berlaku

$$\begin{aligned}\{k\alpha_n\} &= (kx_1, kx_2, kx_3, \dots)\\ &= k(x_1, x_2, x_3, \dots)\\ &= k\{\alpha_n\}.\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa $k\{\alpha_n\} = k(x_1, x_2, x_3, \dots)$ berada di ℓ^2. Untuk setiap $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ sedemikian sehingga berlaku $\sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2 < \infty$ berada di ℓ^2 maka untuk skalar $k \in \mathbb{R}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |\{k\alpha_n\}|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |k|^2 |\{\alpha_n\}|^2\\ &= |k|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2\\ &= \left(\sqrt{k^2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2\\ &= k^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2 < \infty,\end{aligned}$$

sehingga $k\{\alpha_n\} = k(x_1, x_2, x_3, \dots)$ sehingga tertutup terhadap perkalian skalar.

7. Misalkan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in \ell^2$ dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $\{\beta_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ dan $k \in \mathbb{R}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} k(\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}) &= k((x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots)) \\ &= k(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) \\ &= (kx_1 + ky_1, kx_2 + ky_2, kx_3 + ky_3, \dots) \\ &= (\{k\alpha_n\} + \{k\beta_n\}). \end{aligned}$$

Jadi, $k(\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}) = (\{k\alpha_n\} + \{k\beta_n\})$, dengan k adalah skalar atas lapangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi perkalian distributif atas penjumlahan.

8. Misalkan $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $a, b \in \mathbb{R}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} (a + b)\{\alpha_n\} &= (a + b)(x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= \big((a + b)x_1, (a + b)x_2, (a + b)x_3, \dots\big) \\ &= (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2, ax_3 + bx_3, \dots) \\ &= (ax_1, ax_2, ax_3, \dots) + (bx_1, bx_2, bx_3, \dots) \\ &= a(x_1, x_2, x_3, \dots) + b(x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= a\{\alpha_n\} + b\{\alpha_n\}. \end{aligned}$$

Jadi, $(a + b)\{\alpha_n\} = a\{\alpha_n\} + b\{\alpha_n\}$.

9. Misalkan $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $a, b \in \mathbb{R}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} (ab)\{\alpha_n\} &= (ab)(x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= \big((ab)x_1, (ab)x_2, (ab)x_3, \dots\big) \end{aligned}$$

$$= a(bx_1, bx_2, bx_3, \dots)$$

$$= a(b(x_1, x_2, x_3, \dots))$$

$$= a\{b\alpha_n\}.$$

Jadi, $(ab)\{\alpha_n\} = a\{b\alpha_n\}$.

10. Misalkan $\{\alpha_n\} \in \ell^2$, untuk setiap $1 \in \mathbb{R}$ maka berlaku :

$$1\{\alpha_n\} = \{\alpha_n\}$$

untuk setiap $\{\alpha_n\} \in \ell^2$. Jadi, $1\{\alpha_n\} = \{\alpha_n\}$.

Ruang barisan ℓ^2 memenuhi semua aksioma, sehingga terbukti bahwa ℓ^2 adalah suatu ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$.

Misalkan di dalam suatu ruang vektor terdapat suatu himpunan bagian tak kosong maka dapat terbentuk suatu subruang vektor. Berikut ini akan dijelaskan tentang definisi suatu subruang vektor.

Definisi 2.14: (Friedberg, 1989 : 14)

Suatu himpunan bagian W pada suatu ruang vektor V atas lapangan real $\mathbb{R}$ dinamakan subruang pada V, jika W adalah ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan bagian dari ruang vektor itu merupakan subruang dari ruang vektor tersebut. Jadi, untuk menunjukkan bahwa himpunan bagian tersebut adalah subruang tidak harus menunjukkan ke sepuluh aksioma yang berlaku pada Definisi 2.11.

Teorema 2.3 : (Friedberg, 1989 : 14)

Misalkan W adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari ruang vektor V atas lapangan real $\mathbb{R}$ maka W adalah subruang dari V jika hanya jika memenuhi aksioma berikut:

a. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$, dengan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$

b. $\alpha\boldsymbol{x} \in W$, dengan $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\boldsymbol{x} \in W$.

Bukti :

($\Longrightarrow$)

Misalkan W adalah subruang pada ruang vektor V maka W memenuhi semua aksioma pada ruang vektor V termasuk aksioma tentang sifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar yaitu jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ maka $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ dan jika $\boldsymbol{x} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ maka $\alpha\boldsymbol{x} \in W$.

($\Longleftarrow$)

Sebaliknya, jika W merupakan himpunan bagian tak kosong pada ruang vektor V berlaku bahwa untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ maka $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ dan jika $\boldsymbol{x} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ maka $\alpha\boldsymbol{x} \in W$. Artinya, W memenuhi aksioma 1 dan 6 sehingga harus dibuktikan juga bahwa W memenuhi aksioma 2, 3, 7, 8, 9 dan 10 pada ruang vektor V. Jika W merupakan himpunan bagian tak kosong pada ruang vektor V maka vector-vektor pada W adalah vector-vektor pada V sehingga aksioma 2, 3, 7, 8, 9 dan 10 dipenuhi oleh W. Selanjutnya, untuk aksioma 4 dan 5 juga terpenuhi oleh W karena misalkan $\boldsymbol{x} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ maka berdasarkan aksioma 6 berlaku $\alpha\boldsymbol{x} \in W$. Jika $\alpha = 0$ dan $\alpha = -1$ maka berlaku $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} \in W$ dan $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \in W$, sehingga elemen netral dan elemen invers dalam W. Oleh karena itu, W merupakan subruang pada V. ■

Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai contoh dari subruang dari suatu vektor.

Contoh 2.10 :

Berdasarkan Contoh 2.9, ruang barisan ℓ^2 merupakan ruang vektor. Akan dibuktikan bahwa suatu himpunan bagian $S = \left\{\{x_n\} = (x_1, 0, x_3, \dots) \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\}|^2 < \infty\right\}$ merupakan subruang vektor ℓ^2.

Penyelesaian :

Jika $\{x_n\} = (x_1, 0, x_3, \dots)$ dan $\{y_n\} = (y_1, 0, y_3, \dots)$ adalah barisan-barisan elemen S dan $k \in \mathbb{R}$, maka akan ditunjukkan bahwa S memenuhi aksioma 1 dan 6, yaitu sifat ketertutupan penjumlahan dan perkalian skalar

a. Untuk setiap $\{x_n\} = (x_1, 0, x_3, \dots), \{y_n\} = (y_1, 0, y_3, \dots) \in S$ maka berlaku

$$\begin{aligned}\{x_n\} + \{y_n\} &= (x_1, 0, x_3, \dots) + (y_1, 0, y_3, \dots)\\ &= (x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3, \dots) \in S,\end{aligned}$$

b. Untuk setiap $\{x_n\} = (x_1, 0, x_3, \dots) \in S$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka berlaku

$$k\{x_n\} = k(x_1, 0, x_3, \dots) = (kx_1, 0, kx_3, \dots) \in S.$$

Oleh karena itu, barisan-barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar real $\mathbb{R}$. Jadi, terbukti bahwa himpunan bagian S merupakan subruang vektor ℓ^2 atas lapangan real $\mathbb{R}$.

Berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi dari kombinasi linear beserta contohnya.

Definisi 2.15: (Friedberg, 1989 : 21)

Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$. Suatu vektor $\boldsymbol{x}$ dikatakan kombinasi linear dari vektor-vektor $\boldsymbol{y_1}, \dots, \boldsymbol{y_n}$ dalam V jika vektor-vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{y_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{y_n},$$

dengan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Berikut ini akan dijelaskan mengenai contoh dari kombinasi linear.

Contoh 2.11:

Misalkan suatu ruang vektor $\mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{u} = (1, -2, -5, -3)$ dan $\boldsymbol{v} = (3, -5, -4, -9)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^4$. Akan ditunjukkan bahwa vektor $\boldsymbol{w} = (2, -2{,}12, -6)$ adalah kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ serta $\boldsymbol{z} = (3, -2{,}7, -8)$ bukan merupakan kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}$ dan .

Penyelesaian :

i. Kasus pertama

Untuk menentukan skalar a dan b sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$$

$$(2, -2{,}12, -6) = a(1, -2, -5, -3) + b(3, -5, -4, -9)$$

$$(2, -2{,}12, -6) = (a + 3b, -2a - 5b, -5a - 4D, -3a - 9b) \quad (2.1)$$

dengan penyamaan komponen-komponen yang bersesuaian pada (2.1) menghasilkan sistem persamaan linear

$$\begin{cases} a + 3b = 2 \\ -2a - 5b = -2 \\ -5a - 4b = 12 \\ -3a - 9b = -6 \end{cases}. \tag{2.2}$$

Untuk mencari solusi pada (2.2), maka dilakukan operasi baris elementer, tetapi sebelumnya sistem persamaan linear tersebut diubah ke dalam matriks yang diperbesar maka berlaku

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -2 \\ -5 & -4 & 12 \\ -3 & -9 & -6 \end{array}\right] \tag{2.3}$$

Dari (2.3) tambahkan baris kedua dengan 2 kali baris pertama, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & 12 \\ -3 & -9 & -6 \end{array}\right] \tag{2.4}$$

Dari (2.4) tambahkan baris ketiga dengan 5 kali baris pertama, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 22 \\ -3 & -9 & -6 \end{array}\right] \tag{2.5}$$

Dari (2.5) tambahkan baris keempat dengan 3 kali baris pertama, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.6}$$

Dari (2.6) kurangkan baris ketiga dengan 11 kali baris kedua, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.7}$$

Dari (2.7) kurangkan baris pertama dengan 3 kali baris kedua, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.8}$$

sehingga diperoleh solusi $a = -4$ dan $b = 2$. Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan nilai skalar a dan b pada (2.1) diperoleh

$$(2, -2, 12, -6) = -4(1, -2, -5, -3) + 2(3, -5, -4, -9).$$

Jadi, $\boldsymbol{w} = (2, -2, 12, -6)$ adalah suatu kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

ii. Kasus kedua

Akan ditunjukkan bahwa tidak ada skalar a dan b sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{p_1} + b\boldsymbol{p_2}$$

$$(3, -2, 7, -8) = a(1, -2, -5, -3) + b(3, -5, -4, -9)$$

$$(3, -2, 7, -8) = (a + 3b, -2a - 5b, -5a - 4b, -3a - 9b) \tag{2.9}$$

dengan penyamaan komponen-komponen yang bersesuaian pada (2.9) menghasilkan

$$\begin{cases} a + 3b = 3 \\ -2a - 5b = -2 \\ -5a - 4b = 7 \\ -3a - 9b = 8 \end{cases}. \tag{2.10}$$

Untuk mencari solusi pada (2.10), maka dilakukan operasi baris elementer, tetapi sebelumnya sistem persamaan linear tersebut diubah ke dalam matriks yang diperbesar maka berlaku

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \\ -5 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 8 \end{array}\right] \tag{2.11}$$

Dari (2.11) tambahkan baris kedua dengan 2 kali baris pertama, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 8 \end{array}\right] \tag{2.12}$$

Dari (2.12) tambahkan baris ketiga dengan 5 kali baris pertama, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & 22 \\ -3 & -9 & 8 \end{array}\right] \tag{2.13}$$

Dari (2.13) tambahkan baris keempat dengan 3 kali baris pertama, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 17 \end{array}\right] \tag{2.14}$$

Dari (2.14) kurangkan baris ketiga dengan 11 kali baris kedua, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{array}\right] \tag{2.15}$$

Dari (2.15) kurangkan baris pertama dengan 3 kali baris kedua, diperoleh

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{array}\right] \tag{2.16}$$

sehingga diperoleh solusi $a = -4$ dan $b = 2$. Tetapi, terdapat persamaan tak konsisten, yaitu $0 = 17$ yang menunjukkan bahwa sistem persamaan linear tersebut bukan solusi. Oleh karena itu, $\boldsymbol{z} = (3, -2, 7, -8)$ bukan merupakan kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$**.**

Jika suatu vektor merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor pada ruang vektor V maka berkaitan dengan kejadian ini diperoleh definisi merentang dan bebas linear berikut.

Definisi 2.16 : (Arifin, 2001 : 33)

Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$ dan himpunan bagian $X \subseteq V$ yang tak kosong dengan $X = \{\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$. Himpunan bagian X dikatakan merentang ruang vektor V, jika untuk setiap vektor $\boldsymbol{y} \in V$ maka berlaku kombinasi linear

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x_n},$$

dengan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Berkaitan dengan kombinasi linear, berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi himpunan bebas linear seperti berikut ini.

Definisi 2.17: (Anton, 1978: 151)

Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$ dan himpunan bagian tak kosong $X = \{\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ dengan $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n} \in V$. Himpunan bagian X dikatakan bebas linear (*linearly independent*) jika persamaan vektor

$$\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{\theta},$$

dengan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ hanya memiliki penyelesaian $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Sedangkan jika terdapat penyelesaian lain maka X dinamakan himpunan tak bebas linear (*linearly dependent*).

Himpunan bagian $X \subseteq V$ tak kosong dengan V adalah ruang vektor memenuhi sifat merentang dan bebas linear maka akan diperoleh definisi basis seperti berikut ini.

Definisi 2.18: (Arifin, 2001: 35)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$. Himpunan bagian $X \subseteq V$ yang tak kosong disebut basis ruang vektor V jika X merentang V dan bebas linear.

Untuk lebih memahami definisi dari merentang, bebas linear, dan basis dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 2.12:

Misalkan $\mathbb{R}^3$ adalah ruang vektor dan himpunan tak kosong $S \subseteq \mathbb{R}^3$, akan ditunjukkan bahwa $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ dengan $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \boldsymbol{v} = (2,2,0), \boldsymbol{w} = (3,3,3)$ adalah suatu basis terhadap $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian :

Untuk menunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut suatu basis, maka harus dibuktikan bahwa vektor-vektor tersebut adalah bebas linear dan merentang. Untuk membuktikan bahwa vektor-vektor tersebut bebas linear, maka dapat dinyatakan dalam kombinasi linear

$$a_1\boldsymbol{u} + a_2\boldsymbol{v} + a_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta}, \tag{2.17}$$

dengan $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Dari persamaan (2.17) kemudian dinyatakan dalam komponen-komponen vektor diperoleh

$$a_1(1,0,0) + a_2(2,2,0) + a_3(3,3,3) = \boldsymbol{\theta}$$

$$(a_1 + 2a_2 + 3a_3, 2a_2 + 3a_3, 3a_3) = (0,0,0) \quad (2.18)$$

Dari persamaan (2.18) dengan memperhatikan kedua ruas yang bersesuaian maka dinyatakan menjadi

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ \qquad\; 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ \qquad\qquad\quad 3a_3 = 0 \end{cases}$$

sehingga diperoleh $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$. Oleh karena itu, himpunan vektor $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ dengan $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \boldsymbol{v} = (2,2,0), \boldsymbol{w} = (3,3,3)$ adalah suatu bebas linear terhadap $\mathbb{R}^3$. Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ dengan $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \boldsymbol{v} = (2,2,0), \boldsymbol{w} = (3,3,3)$ merentang terhadap $\mathbb{R}^3$, maka ambil sebarang $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ sedemikian sehingga dapat dinyatakan dalam kombinasi linear

$$(b_1, b_2, b_3) = a_1\boldsymbol{u} + a_2\boldsymbol{v} + a_3\boldsymbol{w}. \quad (2.19)$$

dengan $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Dari persamaan (2.19) kemudian dinyatakan dalam komponen-komponen vektor diperoleh

$$(b_1, b_2, b_3) = a_1(1,0,0) + a_2(2,2,0) + a_3(3,3,3)$$

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1 + 2a_2 + 3a_3, 2a_2 + 3a_3, 3a_3) \quad (2.20)$$

Dari persamaan (2.20) dengan penyamaan komponen-komponen yang saling bersesuaian pada kedua ruas berlaku sehingga terbentuklah suatu sistem persamaan linear

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = b_1 \\ \quad\quad 2a_2 + 3a_3 = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad 3a_3 = b_3 \end{cases} \tag{2.21}$$

Untuk mencari solusi pada (2.21), maka dilakukan operasi baris elementer, tetapi sebelumnya sistem persamaan linear tersebut diubah ke dalam matriks yang diperbesar maka berlaku

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 2 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 3 & b_3 \end{array}\right] \tag{2.22}$$

Dari (2.22) kalikan $1/_2$ pada baris kedua, diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{b_2}{2} \\ 0 & 0 & 3 & b_3 \end{array}\right] \tag{2.23}$$

Dari (2.23) kurangkan baris pertama dengan 2 kali baris kedua, diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{b_2}{2} \\ 0 & 0 & 3 & b_3 \end{array}\right] \tag{2.24}$$

Dari (2.24) kalikan $1/_3$ pada baris ketiga, diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{b_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_3}{3} \end{array}\right] \tag{2.25}$$

Dari (2.25) kurangkan baris kedua dengan $^3/_2$ kali baris ketiga, diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b_2 - b_3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_3}{3} \end{array}\right] \tag{2.26}$$

sehingga diperoleh

$$a_1 = b_1 - b_2, \quad a_2 = \frac{b_2 - b_3}{2}, \quad a_3 = \frac{b_3}{3}. \tag{2.27}$$

Artinya, untuk setiap $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ terdapat $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3)$. Oleh karena itu, himpunan vektor $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ dengan $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \boldsymbol{v} = (2,2,0), \boldsymbol{w} = (3,3,3)$ merentang terhadap $\mathbb{R}^3$. Jadi, vektor-vektor $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ merupakan basis.

Di dalam ruang vektor terdapat suatu himpunan vektor berhingga dan tak berhingga. Berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi suatu ruang vektor berdimensi hingga dan berdimensi tak hingga.

Definisi 2.19: (Kreyszig, 1978: 54)

Suatu ruang vektor V dikatakan berdimensi hingga jika terdapat suatu bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $S \subseteq V$ berisi himpunan sebanyak n vektor pada V yang membentuk basis. Jika n adalah dimensi pada V maka dim $V = n$, sehingga jika $V = \{\boldsymbol{0}\}$ berdimensi hingga maka dim $V = 0$. Jika V tidak berdimensi hingga maka V dinamakan berdimensi tak hingga.

Berkaitan dengan subruang pada ruang vektor terdapat suatu penggambaran tentang hubungan dua buah subruang vektor. Pandang Y dan Z

masing-masing sebagai subruang pada ruang vektor V, maka jumlahan dari Y dan Z akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.20: (Arifin, 2001: 44)

Misalkan Y dan Z adalah subruang pada ruang vektor V, maka jumlahan dari Y dan Z didefinisikan oleh:

$$Y + Z = \{\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} | \boldsymbol{y} \in \square \text{ dan } \boldsymbol{z} \in Z\}.$$

Berikut ini akan dijelaskan mengenai proposisi tentang hubungan antara dua buah subruang pada ruang vektor yang berkaitan dengan jumlahan dan irisan keduanya.

Proposisi 2.1 : (Arifin, 2001: 45)

Misalkan Y dan Z adalah subruang pada ruang vektor V maka jumlahan dari $Y + Z$ membentuk subruang dari ruang vektor V dan merupakan subruang terkecil yang memuat Y dan Z.

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa $Y + Z$ merupakan subruang, maka harus ditunjukkan bahwa $Y + Z$ tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar.

a. Ambil $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in Y$ dan $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in Z$ maka jumlahan Y dan Z berlaku

$$(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{z}_1), (\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{z}_2) \in Y + Z,$$

sehingga jika setiap elemen dari $Y + Z$ dijumlahkan diperoleh

$$(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{z}_1) + (\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{z}_2) = (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) + (\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) \in Y + Z,$$

karena $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in Y$ dan $\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 \in Z$. Oleh karena itu, $Y + Z$ tertutup terhadap penjumlahan.

b. Untuk setiap $k \in \mathbb{R}$ dan $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{z}_1 \in Y + Z$ maka berlaku

$$k(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{z}_1) = k\boldsymbol{y}_1 + k\boldsymbol{z}_1 \in Y + Z,$$

karena $k\boldsymbol{y}_1 \in Y$ dan $k\boldsymbol{z}_1 \in Z$. Oleh karena itu, $Y + Z$ tertutup terhadap perkalian skalar.

Jadi, terbukti bahwa hasil jumlahan $Y + Z$ suatu subruang pada V.

Selanjutnya, jumlahan $Y + Z$ memuat subruang Y dan Z. Misalkan W suatu subruang yang memuat Y dan Z, maka W memuat jumlahan $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, untuk setiap $\boldsymbol{y} \in Y$ dan $\boldsymbol{z} \in Z$. Oleh karena itu, $Y + Z \subseteq W$ dan W memuat jumlahan $Y + Z$. Hal ini membuktikan bahwa $Y + Z$ suatu subruang terkecil yang memuat subruang Y dan Z. ■

Proposisi 2.2 : (Arifin, 2001: 45)

Misalkan V adalah suatu ruang vektor, Y dan Z adalah subruang dari V. Irisan $Y \cap Z$ membentuk subruang dari V dan merupakan subruang terbesar yang termuat dalam Y dan Z.

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa $Y \cap Z$ merupakan subruang, maka harus ditunjukkan bahwa $Y \cap Z$ tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar.

a. Ambil $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in Y \cap Z$ maka $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in Y$ dan $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in Z$. Selanjutnya, Y dan Z merupakan subruang pada V maka berdasarkan Teorema 2.1 berlaku $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \in Y, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \in Z$. Hal ini menunjukkan bahwa $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \in Y \cap Z$.

b. Ambil $\boldsymbol{y} \in Y \cap Z$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka $\boldsymbol{y} \in Y$ dan $\boldsymbol{y} \in Z$ sehingga berlaku $k\boldsymbol{y} \in Y, k\boldsymbol{y} \in Z$. Hal ini menunjukkan bahwa $k\boldsymbol{y} \in Y \cap Z$.

Jadi, terbukti bahwa irisan $Y \cap Z$ membentuk subruang dari V.

Selanjutnya, misalkan W adalah suatu subruang dari V yang termuat dalam Y dan Z, sehingga $W \subseteq Y \cap Z$. Hal ini menunjukkan bahwa $Y \cap Z$ adalah subruang terbesar yang termuat dalam subruang Y dan Z. ■

Dari penjelasan dua proposisi di atas, diperoleh suatu keterkaitan di antara $Y \cap Z$ dan jumlahan $Y + Z$ yang menghasilkan definisi dari *direct sum* seperti berikut.

Definisi 2.21: (Arifin, 2001:45)

Misalkan Y dan Z yang merupakan subruang pada ruang vektor V, maka *direct sum* dari Y dan Z pada V dinotasikan dengan $V = Y \oplus Z$ yaitu hasil jumlahan $Y + Z$ dan $Y \cap Z = \{\boldsymbol{\theta}\}$.

Untuk mengetahui sifat dari *direct sum* dapat dilihat pada teorema berikut ini.

Teorema 2.4 : (Arifin, 2001: 46)

Misalkan V suatu ruang vektor, Y dan Z subruang dari V yang memenuhi $V = Y + Z$ maka *direct sum* $V = Y \oplus Z$ jika hanya jika untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$

dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z$.

Bukti :

Misalkan $V = Y \oplus Z$ dan diketahui bahwa $V = Y + Z$. Jika dimisalkan $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in Y, \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in Z$ maka jumlahan dari $Y + Z$ diperoleh $(\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{z_1}), (\boldsymbol{y_2} + \boldsymbol{z_2}) \in Y + Z$**.** Untuk membuktikan ketunggalan, misalkan

$$\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{y_2} + \boldsymbol{z_2},$$

dengan $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in Y, \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in Z$ maka $\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1}$**.** Selanjutnya**,** karena Y dan Z subruang dari V maka berlaku $\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} \in Y, \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} \in Z$ sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} \in Y \cap Z,$$

karena $Y \cap Z = \{\boldsymbol{\theta}\}$ maka $\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{\theta}$**,** sehingga diperoleh $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_2}$ dan $\boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{z_1}$. Jadi, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$ dapat dinyatakan sebagai $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z$ dan bersifat tunggal.

Sebaliknya, misalkan untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$ dengan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z$ bersifat tunggal. Selanjutnya, ambil vektor $\boldsymbol{x} \in Y \cap Z$. Vektor $\boldsymbol{x}$ sebagai elemen dari Y dapat dinyatakan dengan

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}, \tag{2.28}$$

dengan vektor $\boldsymbol{\theta}$ elemen di Z. Demikian juga vektor $\boldsymbol{x}$ sebagai elemen dari Z dapat dinyatakan juga dengan

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{x}, \tag{2.29}$$

dengan vektor $\boldsymbol{\theta}$ elemen di Y, maka dari persamaan (2.28) dan (2.29) diperoleh

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{x},$$

sehingga $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ dan $Y \cap Z = \{\boldsymbol{\theta}\}$. Oleh karena itu, $V = Y + Z$ dan $Y \cap Z = \{\boldsymbol{\theta}\}$ maka diperoleh $V = Y \oplus Z$. ■

D. Transformasi Linear

Secara umum suatu pemetaan dapat didefinisikan dari suatu himpunan ke dalam suatu himpunan yang lain. Secara khusus akan dipelajari pemetaan dari ruang vektor ke dalam ruang vektor yang lain yang menggunakan operasi pada ruang vektor, yaitu operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

Definisi 2.22: (Arifin ,2001 : 51)

Misalkan V dan W ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$. Transformasi linear $T: V \to W$ adalah pemetaan dari suatu ruang vektor V ke ruang vektor W yang memenuhi :

a. $T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$, untuk setiap $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ di V ;

b. $T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Suatu pemetaan $T: V \to V$ adalah suatu transformasi linear dari suatu ruang vektor ke dirinya sendiri, maka T merupakan suatu operator linear pada V.

Berikut ini adalah contoh mengenai transformasi linear.

Contoh 2.13:

Misalkan ℓ^2 adalah suatu ruang vektor (berdasarkan Contoh 2.9), suatu pemetaan $T: \ell^2 \to \ell^2$ didefinisikan oleh

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (0, x_1, x_2, x_3, \dots). \tag{2.30}$$

Akan ditunjukkan bahwa T adalah suatu transformasi linear.

Penyelesaian :

Misalkan $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $\{y_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ vektor-vektor di ℓ^2 maka

$$\begin{aligned}\{x_n\} + \{y_n\} &= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, {}_{-3}, \dots) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots),\end{aligned}$$

sehingga berlaku

$$\begin{aligned}T(\{x_n\} + \{y_n\}) &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) \\ &= (0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) \\ &= (0 + 0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) \\ &= (0, x_1, x_2, x_3, \dots) + (0, y_1, y_2, y_3, \dots) \\ &= T(\{x_n\}) + T(\{y_n\}).\end{aligned}$$

Jika k adalah skalar di lapangan $\mathbb{R}$ maka $k\{x_n\} = k(x_1, x_2, x_3, \dots) = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots)$ sehingga berdasarkan (2.30) berlaku:

$$\begin{aligned}T(\{kx_n\}) &= T(kx_1, kx_2, kx_3, \dots) \\ &= (0, kx_1, kx_2, kx_3, \dots) \\ &= k(0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= kT(\{x_n\}).\end{aligned}$$

Dengan demikian, pemetaan $T: \ell^2 \to \ell^2$ merupakan suatu transformasi linear.

Berikut ini adalah teorema yang berlaku pada transformasi linear.

Teorema 2.5 : (Anton, 1978: 235)

Misalkan V dan W ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$. Jika $T: V \to W$ adalah suatu transformasi linear, maka berlaku

a. $T(0\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}$**,** untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$

b. $T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$

c. $T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y})$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

Bukti :

a. Misalkan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor di ruang vektor V, maka berlaku $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} \in V$ dengan $0 \in \mathbb{R}$ dan T suatu transformasi linear sehingga diperoleh

$$T(\boldsymbol{\theta}) = T(0\boldsymbol{x}) = 0T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}.$$

b. Misalkan T suatu transformasi linear maka untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$ berlaku $T(\boldsymbol{x})$, sehingga untuk $-1 \in \mathbb{R}$ dan berdasarkan aksioma 6 berlaku $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \in V$ dan diperoleh

$$T(-\boldsymbol{x}) = T((-1)\boldsymbol{x}) = (-1)T(\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x}).$$

c. Misalkan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ adalah sebarang vektor di ruang vektor V, maka selisih dari dua vektor tersebut dapat dinyatakan dengan

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{y}. \tag{2.31}$$

T merupakan transformasi linear sehingga dari persamaan (2.31) berlaku

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) &= T(\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{y}) \\ &= T(\boldsymbol{x}) + T(-1)(\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y}). \blacksquare \end{aligned}$$

Di dalam transformasi linear terdapat suatu invers. Misalkan $P: V \rightarrow W$ dan $Q: W \rightarrow V$ adalah transformasi linear sedemikian sehingga Q merupakan suatu invers dari P. Berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi invers dari suatu transformasi linear.

Definisi 2.23: (Gerber, 1990: 312)

Misalkan $T: V \rightarrow W$ adalah suatu transformasi linear, maka invers dari T adalah suatu transformasi dari W ke V, dinotasikan $T^{-1}: W \rightarrow V$ sedemikian sehingga

$$T^{-1}(\boldsymbol{w}) = \{\boldsymbol{v} \in V | T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}, \text{untuk setiap } \boldsymbol{w} \in W\},$$

Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai definisi dari range dan kernel dari suatu transformasi linear pada ruang vektor.

Definisi 2.24: (Gerber, 1990: 314)

Misalkan $T: V \rightarrow W$ suatu transformasi linear maka himpunan vektor di V yang dipetakan ke dalam vektor $\boldsymbol{\theta}$ di W dinamakan Kernel (ruang null) dari T, dinotasikan dengan

$$\ker(T) = \{\boldsymbol{v} \in V | T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\theta} \in W\}.$$

Sedangkan, untuk setiap $\boldsymbol{w} \in W$ maka terdapat satu elemen $\boldsymbol{v}$ dalam V sedemikian sehingga $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ dinamakan range dari T, dinotasikan dengan

$$\text{range}(T) = \{\boldsymbol{w} \in W | T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}, \text{dengan } \boldsymbol{v} \in V\}.$$

Berikut ini adalah teorema yang berhubungan dengan range dan kernel pada suatu transformasi linear T.

Teorema 2.6 : (Gerber, 1990: 317-318)

Misalkan V dan W masing-masing adalah ruang vektor, suatu transformasi linear $T: V \to W$ berlaku

a. Ker(T) adalah subruang pada V
b. Range(T) adalah subruang pada W

Bukti :

a. Misalkan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ adalah vektor-vektor di ker(T) dan T adalah transformasi linear maka berlaku $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}$ dan $T(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\theta}$, jika k adalah sebarang skalar atas lapangan real $\mathbb{R}$ maka berlaku

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \tag{2.32}$$

sehingga $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ berada dalam ker(T). Selanjutnya

$$T(k\boldsymbol{x}) = kT(\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \tag{2.33}$$

sehingga $k\boldsymbol{x}$ berada dalam ker(T). Berdasarkan Teorema 2.1 maka persamaan (2.32) dan (2.33) menunjukkan bahwa ker(T) merupakan subruang pada V.

b. Misalkan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ berada di range(T) maka terdapat vektor $\boldsymbol{a}_1$ dan $\boldsymbol{a}_2$ di V sedemikian sehingga berlaku $T(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{x}$ dan $T(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{y}$ maka diperoleh

$$T(\boldsymbol{a}_1) + T(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \tag{2.34}$$

dan untuk skalar $k \in \mathbb{R}$ diperoleh

$$T(k\boldsymbol{a}_1) = kT(\boldsymbol{a}_1) = k\boldsymbol{x}. \tag{2.35}$$

Dengan demikian, persamaan (2.34) dan (2.35) tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar. oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.1 range(T) merupakan subruang pada W. ■

E. Ruang *Pre*-Hilbert

Pada suatu ruang vektor V yang berdimensi hingga dapat didefinisikan suatu hasil kali antara vektor-vektor pada ruang vektor yang didefinisikan secara aksiomatis. Definisi berikut akan diberikan pada suatu ruang vektor atas lapangan real.

Definisi 2.25: (Anton, 1978: 175)

Suatu *inner product* pada ruang vektor V adalah suatu pemetaan yang menghubungkan masing-masing pasangan vektor $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ anggota V dengan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ skalar atas lapangan real $\mathbb{R}$ pada V sedemikian sehingga untuk setiap skalar α aksioma-aksioma berikut terpenuhi

a. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

b. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ dan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$, jika hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

c. $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$

d. $\langle \alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = a \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, dengan $\mathbb{R}$ adalah skalar atas lapangan real pada V dan $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$.

Dari definisi *inner product* di atas, maka diperoleh suatu definisi ruang *pre*-Hilbert sebagai berikut.

Definisi 2.26: (Anton, 1978: 175)

Suatu ruang vektor V yang dilengkapi dengan *inner product* dinamakan ruang *inner product*. Ruang *inner product* juga dinamakan ruang *pre*-Hilbert.

Suatu *inner product* dapat dinyatakan ke dalam norma dan jarak suatu vektor. Berikut akan dijelaskan definisi dari hal-hal tersebut.

Definisi 2.27: (Anton, 1978: 182)

Misalkan X adalah suatu ruang *pre*-Hilbert dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor di X maka norma vektor $\boldsymbol{x}$ didefinisikan oleh:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Jika suatu barisan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ maka berlaku norma barisan berlaku

$$\begin{aligned}
\|\{\alpha_n\}\| = \langle \{\alpha_n\}, \{\alpha_n\} \rangle^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\langle \{\alpha_n\}, \{\alpha_n\} \rangle} \\
&= \sqrt{(x_1, x_2, x_3, \dots) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{(x_1, x_2, x_3, \dots)(x_1, x_2, x_3, \dots)^T} \\
&= \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots}
\end{aligned}$$

Definisi 2.28: (Anton, 1978: 182)

Misalkan X adalah suatu ruang *pre*-Hilbert dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor di X maka jarak vektor $\boldsymbol{x}$ didefinisikan oleh:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle}.$$

Berikut adalah contoh dari suatu ruang *pre*-Hilbert.

Contoh 2.14:

Misalkan ℓ^2 adalah suatu ruang vektor, dengan $\ell^2 = \left\{\{\alpha_n\} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2 < \infty\right\}$.

Akan ditunjukkan bahwa ℓ^2 adalah ruang *pre*-Hilbert.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa ruang vektor ℓ^2 merupakan ruang *pre*-Hilbert jika didefinisikan suatu *inner product* sebagai berikut

$$\begin{aligned}\langle\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \dots)(y_1, y_2, y_3, \dots)^T \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \dots\end{aligned}$$

a. Untuk setiap $\{\alpha_n\},\{\beta_n\} \in \ell^2$akan dibuktikan $\langle\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\rangle = \langle\{\beta_n\},\{\alpha_n\}\rangle$ maka diperoleh

$\langle\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\rangle = (x_1, x_2, x_3, \dots)(y_1, y_2, y_3, \dots)^T$

$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \dots$

$= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 \dots$ (karena $\{\alpha_n\}$ dan $\{\beta_n\}$ merupakan barisan bilangan real maka untuk setiap $x_1, y_1, \dots \in \mathbb{R}$ berlaku $x_1 + y_1 = y_1 + x_1 = \cdots \in \mathbb{R}$)

$= (y_1, y_2, y_3, \dots)(x_1, x_2, x_3, \dots)^T$

$= \langle\{\beta_n\},\{\alpha_n\}\rangle$.

b. Untuk setiap $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ dengan berlaku $\langle\{\alpha_n\},\{\alpha_n\}\rangle > 0$ dan $\langle\{\alpha_n\},\{\alpha_n\}\rangle = 0$ jika hanya jika $\{\alpha_n\} = \boldsymbol{\theta}$ maka diperoleh

$$\langle\{\alpha_n\},\{\alpha_n\}\rangle = (x_1, x_2, x_3, \dots)(x_1, x_2, x_3, \dots)^T$$

$$= x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3 \dots$$

$$= x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 \dots > 0.$$

Misalkan$\langle\{\alpha_n\},\{\alpha_n\}\rangle = 0$, maka berlaku bahwa

$$(x_1, x_2, x_3, \dots)(x_1, x_2, x_3, \dots)^T = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \cdots = 0,$$

sehingga $\{\alpha_n\} = \boldsymbol{\theta}$.

Sebaliknya, jika $\{\alpha_n\} = \boldsymbol{\theta}$ maka berlaku bahwa

$$\langle\{\alpha_n\},\{\alpha_n\}\rangle = \langle\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle = (0,0,0,\dots)(0,0,0,\dots)^T = 0$$

c. Untuk setiap $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\} \in \ell^2$akan dibuktikan $\langle\{\alpha_n\}+\{\beta_n\},\{\gamma_n\}\rangle = \langle\{\alpha_n\},\{\gamma_n\}\rangle + \langle\{\beta_n\},\{\gamma_n\}\rangle$ maka diperoleh

$$\langle\{\alpha_n\}+\{\beta_n\},\{\gamma_n\}\rangle = (\{\alpha_n\}+\{\beta_n\})\{\gamma_n\}$$

$$= \big((x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots)\big)(z_1, z_2, z_3, \dots)^T$$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)(z_1, z_2, z_3, \dots)^T$$

$$= \big((x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + (x_3 + y_3)z_3 + \cdots\big)$$

$$= (x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + x_3z_3 + y_3z_3 + \cdots)$$

$$= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 + \cdots)$$

$$+(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 + \cdots)$$

$$= \big((x_1, x_2, x_3, \dots)(z_1, z_2, z_3, \dots)^T\big)$$

$$+\big((y_1, y_2, y_3, \dots)(z_1, z_2, z_3, \dots)^T\big)$$

$$= \langle \{\alpha_n\}, \{\gamma_n\} \rangle + \langle \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \rangle.$$

d. Untuk setiap $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in \ell^2$ dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots), \{\beta_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ dan skalar $k \in \mathbb{R}$ berlaku $\langle \{k\alpha_n\}, \{\beta_n\} \rangle = k \langle \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \rangle$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \langle \{k\alpha_n\}, \{\beta_n\} \rangle &= (kx_1, kx_2, kx_3, \dots)(y_1, y_2, y_3, \dots)^T \\ &= (kx_1y_1 + kx_2y_2 + kx_3y_3 \dots) \\ &= k(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \dots) \\ &= k\langle \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \rangle. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, ruang vektor ℓ^2 merupakan ruang *pre*-Hilbert.

Berkaitan dengan norma yang berlaku pada suatu ruang vektor. Berikut ini akan dijelaskan mengenai teorema-teorema yang berlaku pada norma, yaitu hukum parallelogram, ketaksamaan Cauchy-Scwarz, dan ketaksamaan segitiga.

Teorema 2.7 : Hukum Parallelogram (Berberian, 1961: 29)

Untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ di dalam ruang *pre*-Hilbert X berlaku

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ adalah vektor-vektor pada suatu ruang *pre*-Hilbert X, maka berlaku

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle \quad \text{(Definisi 2.25 aksioma c)} \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \quad \text{(Definisi 2.25 aksioma c)} \end{aligned}$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle. \tag{2.36}$$

Selanjutnya, dengan mengganti $\boldsymbol{y}$ dengan $-\boldsymbol{y}$ diperoleh:

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle \quad \text{(Definisi 2.25 aksioma c)}$$

$$= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \quad \text{(Definisi 2.25 aksioma c)}$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle. \tag{2.37}$$

Dari hasil penjumlahan persamaan (2.36) dan (2.37) diperoleh $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2$. ■

Teorema berikut akan menjelaskan keterkaitan nilai mutlak dari suatu *inner product* dengan norma dari vektor-vektornya.

Teorema 2.8 : Ketaksamaan Cauchy-Schwarz (Berberian, 1961: 30)

Untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ di dalam ruang *pre*-Hilbert X berlaku

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|. \tag{2.38}$$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ adalah vektor-vektor pada suatu ruang *pre*-Hilbert X, untuk $\boldsymbol{y} = 0$ maka persamaan (2.36) berlaku

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = 0 \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| . \tag{2.39}$$

Untuk $\boldsymbol{y} \neq 0$, misalkan

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{y},$$

dengan $\boldsymbol{z}$ adalah vektor pada ruang *pre*-Hilbert X maka berdasarkan persamaan (2.39) diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 \le \|\boldsymbol{z}\|^2 &= \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y} \rangle - \langle \alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y} \rangle \text{ (Definisi 2.25 aksioma c)} \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle - \langle \alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \alpha\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle \text{ (Definisi 2.25 aksioma c)} \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle + \alpha[\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle] \text{ (Definisi 2.25 aksioma c)} \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \alpha[\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle] \text{ (Definisi 2.25 aksioma d)} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \alpha[\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle].
\end{aligned}
$$

Dengan memisalkan $[\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle] = 0$, maka diperoleh

$$0 \le \|\boldsymbol{z}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \tag{2.40}$$

dan

$$\alpha = \frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle}. \tag{2.41}$$

Selanjutnya, persamaan (2.41) disubstitusikan ke persamaan (2.40) diperoleh

$$0 \le \|\boldsymbol{x}\|^2 - \frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle,$$

atau

$$0 \le \|\boldsymbol{x}\|^2 - \frac{|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$$

sehingga,

$$\frac{|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2} \le \|\boldsymbol{x}\|^2.$$

Selanjutnya, dengan mengalikan kedua ruas dengan $\|\boldsymbol{y}\|^2$ diperoleh $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2$. Oleh karena itu, $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$. ■

Teorema 2.9 : Ketaksamaan Segitiga (Berberian, 1961: 30)

Untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ di dalam ruang *pre*-Hilbert X berlaku

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

Bukti :

Dengan menggunakan langkah pada ketaksamaan Cauchy-Schwarz, yaitu :

$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\rangle$

$= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle$

(aksioma c)

$= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2$ (ketaksamaan Cauchy-Schwarz)

$= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2.$

Selanjutnya, jika kedua ruas masing-masing diakarkan maka diperoleh $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$. ■

Misalkan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ masing-masing vektor tak nol dalam suatu ruang *pre*-Hilbert atas lapangan real $\mathbb{R}$ dan keduanya saling ortogonal jika berlaku suatu *inner product* seperti yang akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.29: (Arifin, 2001: 106)

Vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ dalam ruang *pre*-Hilbert X dikatakan ortogonal (saling ortogonal) jika $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$.

Vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ yang ortogonal dinotasikan dengan $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, dan dibaca $\boldsymbol{x}$ ortogonal terhadap $\boldsymbol{y}$ atau sebaliknya $\boldsymbol{y}$ ortogonal terhadap $\boldsymbol{x}$. Menurut definisi di atas, vektor nol ortogonal pada setiap vektor di ruang *pre*-Hilbert X.

Definisi 2.30: (Berberian, 1961 : 71)

Misalkan Y adalah subruang *pre*-Hilbert X, $Y^{\perp}$ dinamakan komplemen ortogonal dari Y pada X dan berlaku

$$Y^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in X | \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0, \text{untuk setiap } \boldsymbol{y} \in Y\}.$$

Berdasarkan definisi di atas, suatu subruang *pre*-Hilbert memiliki komplemen ortogonal. Proposisi berikut akan menjelaskan irisan dari subruang *pre*-Hilbert dengan komplemen ortogonalnya serta menjelaskan bahwa komplemen ortogonal dari subruang *pre*-Hilbert juga merupakan suatu subruang.

Proposisi 2.3 : (Arifin, 2001: 110)

Misalkan X adalah ruang *pre*-Hilbert dan S adalah subruang pada X, maka berlaku :

a. $S \cap S^{\perp} = \{\boldsymbol{\theta}\}$

b. $S^{\perp}$ adalah subruang dari X

Bukti :

a. Misalkan sebarang $\boldsymbol{x} \in S \cap S^{\perp}$, maka $\boldsymbol{x} \in S$ dan $\boldsymbol{x} \in S^{\perp}$ sedemikian sehingga $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$. Oleh karena itu, berdasarkan aksioma (b) *inner product* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$.

b. Ambil sebarang $S^{\perp}$ himpunan bagian pada ruang *pre*-Hilbert X, akan ditunjukkan bahwa $S^{\perp}$ adalah subruang dari X.

   i. $S^{\perp}$ himpunan bagian tak kosong, sebab $\boldsymbol{\theta} \in S^{\perp}$.

   ii. Misalkan $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in S^{\perp}$, maka untuk setiap $\boldsymbol{y} \in S$ berlaku $\langle \boldsymbol{x_1}, \rangle = \langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ sehingga $\langle \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. Oleh karena itu, $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \in S^{\perp}$.

   iii. Misalkan $\boldsymbol{x_1} \in S^{\perp}$ dan $r \in R$, maka untuk setiap $\boldsymbol{y} \in S$ berlaku $\langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ sehingga $\langle r\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y} \rangle = r\langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y} \rangle = r0 = 0$. Oleh karena itu, $r\,\boldsymbol{x}_1 \in S^{\perp}$.

Jadi, terbukti bahwa $S^{\perp}$ adalah subruang pada X. ■

Pada teorema berikut akan dibuktikan bahwa relasi Pythagoras memenuhi untuk setiap pasangan dari vektor-vektor ortogonal di suatu ruang *pre*-Hilbert sehingga dapat digeneralisasikan untuk setiap skalar yang diperoleh dari vektor-vektor ortogonal.

Teorema 2.10 : Relasi Pythagoras (Berberian, 1961: 44)

Untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ di dalam ruang *pre*-Hilbert X dari vektor-vektor ortogonal berlaku

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ adalah vektor-vektor pada suatu ruang *pre*-Hilbert X. Jika $\boldsymbol{x}$ ortogonal ke $\boldsymbol{y}$ maka berlaku $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle \quad \text{(Definisi 2.25 aksioma c)} \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \quad \text{(Definisi 2.25 aksioma c)} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 0 + 0 + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2. \blacksquare
\end{aligned}$$

F. Proyeksi Ortogonal

Dalam subbab sebelumnya telah dijelaskan bahwa suatu transformasi linear dikatakan operator linear jika pemetaan tersebut memetakan suatu ruang ke dirinya sendiri. Kasus khusus dari suatu operator linear adalah proyeksi. Untuk lebih memahami penjelasan tentang proyeksi dapat dilihat pada definisi berikut.

Definisi 2.31: (Arifin, 2001:77)

Misalkan M dan N adalah subruang pada ruang *pre*-Hilbert X dan suatu operator linear $P: X \longrightarrow X$ dinamakan proyeksi pada M sepanjang N jika berlaku $X = M \oplus N$ maka untuk setiap vektor $\boldsymbol{x} \in X$ dapat dinyatakan secara tunggal $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in M, \boldsymbol{z} \in N$ sedemikian sehingga berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

Berdasarkan Teorema 2.4 range dan kernel dari suatu operator linear merupakan subruang. Berikut ini adalah teorema mengenai proyeksi yang berkaitan dengan range dan kernel dari operator linear.

Teorema 2.10 : (Wiedmann, 1980: 29)

Misalkan X adalah suatu ruang *pre*-Hilbert, maka berlaku

a. Jika $P: X \longrightarrow X$ adalah suatu proyeksi, maka $X = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$.
b. Jika $X = Y \oplus Z$, dengan Y dan Z adalah subruang pada X maka terdapat suatu proyeksi $P: X \longrightarrow X$ dengan $Y = \text{range}(P)$ dan $Z = \ker(P)$.

Bukti :

a. Misalkan $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x})$ maka berdasarkan Definisi 2.23 jelas bahwa $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P)$. Jika $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P) \cap \ker(P)$ maka $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x}) \in \text{range}(P)$ dan $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta} \in \ker(P)$, sehingga $\text{range}(P) \cap \ker(P) = \{\boldsymbol{\theta}\}$. Untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ dapat dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x}) + \big(\boldsymbol{x} - P(\boldsymbol{x})\big),$$

dengan $P(\boldsymbol{x}) \in \text{range}(P)$ dan $\big(\boldsymbol{x} - P(\boldsymbol{x})\big) \in \ker(P)$ karena

$$P\big(\boldsymbol{x} - P(\boldsymbol{x})\big) = P(\boldsymbol{x}) - P\big(P(\boldsymbol{x})\big) \text{ (berdasarkan Teorema 2.3 c)}$$

$$= P(\boldsymbol{x}) - P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}.$$

Jadi, karena berlaku jumlahan $\text{range}(P) + \ker(P)$ dan $\text{range}(P) \cap \ker(P) = \{\boldsymbol{\theta}\}$ maka terbukti bahwa $X = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$. ■

b. Misalkan $X = Y \oplus Z$ maka berdasarkan Teorema 2.2 untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ dapat dinyatakan secara tunggal $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in Y$ dan $\boldsymbol{z} \in Z$. Berdasarkan pembuktian pada (a) jika $\boldsymbol{y} \in Y$ dan $\boldsymbol{z} \in Z$ maka berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ dan $P(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\theta}$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ dan berdasarkan Definisi 2.23 maka $\boldsymbol{y} \in \text{range}(P), \boldsymbol{z} \in \ker(P)$ sehingga berlaku

$$Y \subseteq \text{range}(P) \quad \text{dan} \quad Z \subseteq \ker(P) \tag{2.42}$$

Sebaliknya, jika berlaku suatu *direct sum* $X = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ dapat dinyatakan secara tunggal $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in \text{range}(P), \boldsymbol{z} \in \ker(P)$ sehingga berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ dan $P(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\theta}$. Berdasarkan Teorema 2.2, hal tersebut menunjukkan bahwa $\boldsymbol{y} \in Y$ dan $\boldsymbol{z} \in Z$ sehingga berlaku

$$\text{range}(P) \subseteq \mathrm{Y} \quad \text{dan} \quad \ker(P) \subseteq Z \tag{2.43}$$

Oleh karena itu, berdasarkan persamaan (2.42) dan (2.43) terbukti bahwa $\text{range}(P) = Y$ dan $\ker(P) = Z$. ■

Berikut ini adalah proposisi yang berlaku pada suatu operator linear yang berkaitan dengan proyeksi pada ruang *pre*-Hilbert.

Proposisi 2.4: (Arifin, 2001: 77-78)

Misalkan X suatu ruang *pre*-Hilbert, operator linear $P: X \longrightarrow X$ adalah suatu proyeksi jika dan hanya jika $P^2 = P$ (P suatu idempoten).

Bukti:

Misalkan $P\colon X \longrightarrow X$ suatu proyeksi maka berlaku suatu *direct sum* $X = M \oplus N$. Berdasarkan Teorema 2.11 maka $M = \mathrm{range}(P)$ dan $N = \ker(P)$ maka untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ dengan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dan $\boldsymbol{y} \in M, \boldsymbol{z} \in N$ sedemikian sehingga berlaku $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ dan $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ diperoleh bahwa

$$P^2(\boldsymbol{x}) = P\big(P(\boldsymbol{x})\big) = P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{x}).$$

Jadi, $P^2(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{x})$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$, sehingga $P^2 = P$.

Sebaliknya, misalkan $P^2 = P$ dan P adalah suatu operator linear maka akan dibuktikan bahwa $X = \mathrm{range}(P) \oplus \ker(P)$. Ambil $\boldsymbol{x} \in X$ maka berlaku $\boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{x})$ dengan $\boldsymbol{y} \in \mathrm{range}(P)$ dan misalkan $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ maka diperoleh $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ sehingga berlaku

$$P(\boldsymbol{z}) = P(\boldsymbol{x}) - P(\boldsymbol{y}) = P(\boldsymbol{x}) - P\big(P(\boldsymbol{x})\big) = P(\boldsymbol{x}) - P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}. \qquad (2.44)$$

Hal ini menunjukan bahwa $\boldsymbol{z} \in \ker(P)$, sehingga $X = \mathrm{range}(P) + \ker(P)$. Selanjutnya, ambil $\boldsymbol{y} \in \mathrm{range}(P) \cap \ker(P)$ karena $\boldsymbol{y} \in \mathrm{range}(P)$ maka $\boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{x})$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$. Selanjutnya, karena $P^2 = P$ maka untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ berlaku $P^2(\boldsymbol{x}) = P(\square\boldsymbol{x})$ dan jika $\boldsymbol{y} \in \ker(P)$ maka diperoleh

$$\boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{x}) = P\big(P(\boldsymbol{x})\big) = P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\theta}, \qquad (2.45)$$

sehingga $\mathrm{range}(P) \cap \ker(P) = \{\boldsymbol{\theta}\}$. Jadi, dari persamaan (2.44) dan (2.45) menunjukan bahwa $X = \mathrm{range}(P) \oplus \ker(P)$. Selanjutnya, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$

dan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in \text{range}(P), \boldsymbol{z} \in \ker(P)$ berlaku $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ sehingga diperoleh

$$P(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{y}) = P\big(P(\boldsymbol{x})\big) = P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}.$$

Jadi, $P: X \longrightarrow X$ berlaku suatu *direct sum* $X = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$, oleh karenanya P adalah suatu proyeksi. ■

Berikut ini akan dijelaskan mengenai teorema suatu operator linear yang berkaitan dengan *pre*-Hilbert.

Teorema 2.12 : (Taylor & Lay, 1980: 250)

Misalkan X adalah suatu ruang *pre*-Hilbert, suatu operator linear $P: X \to X$ dikatakan simetri jika hanya jika

$$\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle \text{ untuk setiap } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X. \qquad (2.46)$$

Bukti :

Misalkan $P: X \to X$ adalah suatu operator linear pada ruang *pre*-Hilbert X. Operator linear T memetakan ruang *pre*-Hilbert X ke dirinya sendiri sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ dan $P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$. Misalkan $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{v}$ dengan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \ker(P)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle &= \langle P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \langle P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{y}) \rangle + \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle, \text{ (Definisi 2.25 aksioma c)} \qquad (2.47) \\ \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle &= \langle P(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}, P(\boldsymbol{y}) \rangle \\ &= \langle P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{y}) \rangle + \langle \boldsymbol{u}, P(\boldsymbol{y}) \rangle. \text{ (Definisi 2.25 aksioma c)} \qquad (2.48) \end{aligned}$$

Jika $\text{range}(P)$ dan $\ker(P)$ adalah ortogonal, maka berdasarkan persamaan (2.47) dan (2.48) dapat diperoleh bahwa $\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{y})\rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y})\rangle$. Di lain pihak, jika persamaan (2.44) berlaku dan $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P), \boldsymbol{y} \in \ker(P)$ maka $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\theta}$, sehingga $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y})\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}\rangle = 0$. Oleh karena itu, operator linear T adalah simetri. ■

Proyeksi pada ruang *pre*-Hilbert dikatakan orthogonal jika dua buah subruang yang dinyatakan dengan *direct sum* saling ortogonal. Berikut akan dijelaskan mengenai definisi proyeksi orthogonal pada ruang *pre*-Hilbert.

Definisi 2.32: (Arifin, 2001: 112)

Misalkan K adalah subruang pada ruang *pre*-Hilbert X dan $K^{\perp}$ adalah komplemen ortogonal pada dan K. Proyeksi ortogonal K adalah suatu proyeksi pada K sepanjang $K^{\perp}$.

Untuk lebih memperjelas ciri dari proyeksi ortogonal dapat dilihat pada teorema berikut yang digunakan untuk memperlihatkan bahwa suatu operator linear merupakan proyeksi ortogonal.

Teorema 2.13 : (Arifin, 2001: 113)

Misalkan X suatu ruang *pre*-Hilbert operator linear $P: X \to X$ suatu proyeksi ortogonal jika dan hanya jika $P: X \to X$ bersifat idempoten dan simetri.

Bukti :

Misalkan $P: X \to X$ suatu proyeksi ortogonal maka berdasarkan Teorema 2.11 operator linear $P: X \to X$ suatu proyeksi pada $\text{range}(P)$ sepanjang $\ker(P)$ dan berlaku

$$X = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$$

Berdasarkan Proposisi 2.4, opertor linear $P: X \to X$ bersifat idempoten maka berlaku $P^2 = P$ dan dengan Definisi 2.32 diperoleh

$$\big(\text{range}(P)\big)^{\perp} = \ker(P)$$

Ambil vektor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, dan ditulis

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \text{ dan } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}$$

dengan $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1} \in \text{range}(P)$ dan $\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2} \in \ker(P)$ diperoleh

$$\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y} \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2} \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2} \rangle + \langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2} \rangle$$ (Definisi 2.25 aksioma c)

$$= \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1} \rangle + \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_2} \rangle + \langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1} \rangle + \langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2} \rangle$$ (Definisi 2.25 aksioma c)

$$= \langle \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1} \rangle + \langle \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2} \rangle$$ (Definisi 2.25 aksioma c)

$$= \langle \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1} \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle.$$

Hal ini menunjukan bahwa operator linear $P: X \to X$ bersifat simetri.

Sebaliknya, misalkan $P: X \to X$ bersifat idempoten dan simetri. Berdasarkan Proposisi 2.4 $P^2 = P$, maka berdasarkan Teorema 2.11 operator linear $P: X \to X$ suatu proyeksi pada $\text{range}(P)$ sepanjang $\ker(P)$ dengan

$$X = \text{range}(P) \oplus \ker(P).$$

Ambil vektor $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P)$ dan $\boldsymbol{y} \in \ker(P)$, berdasarkan Definisi 2.24 dan untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ dan $P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\theta}$ maka diperoleh

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle = 0,$$

sehingga berlaku $P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\theta}$ dan berdasarkan Definisi 2.24 $\boldsymbol{y} \in \left(\text{range}(P)\right)^{\perp}$ maka berlaku

$$\ker(P) \subseteq \left(\text{range}(P)\right)^{\perp}. \tag{2.49}$$

Selanjutnya, jika $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P)$ dan $\boldsymbol{y} \in \left(\text{range}(P)\right)^{\perp}$ maka diperoleh

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle = 0,$$

sehingga berlaku $P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\theta}$ dan berdasarkan Definisi 2.23 $\boldsymbol{y} \in \ker(P)$ maka berlaku

$$\left(\text{range}(P)\right)^{\perp} \subseteq \ker(P). \tag{2.50}$$

Berdasarkan persamaan (2.49) dan (2.50) maka $\left(\text{range}(P)\right)^{\perp} = \ker(P)$. Oleh karena itu, $X = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$ sehingga operator linear $P: X \to X$ adalah suatu proyeksi ortogonal. ■

Untuk lebih memahami proyeksi ortogonal pada ruang *pre*-Hilbert dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 2.15:

Misalkan ℓ^2 adalah suatu ruang *pre*-Hilbert maka terdapat suatu $P: \ell^2 \to \ell^2$ didefinisikan oleh

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots) \rightarrow (0, x_2, x_3, \dots) .$$

Akan ditunjukkan bahwa T adalah suatu proyeksi ortogonal pada ruang *pre*-Hilbert **.**

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa P merupakan suatu operator linear. Misalkan $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $\{y_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ vektor-vektor di ℓ^2 maka

$$\{x_n\} + \{y_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots),$$

berdasarkan definisi berlaku $P(\{x_n\}) = P(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$ dan $P(\{y_n\}) = P(y_1, y_2, y_3, \dots) = (0, y_2, y_3, \dots)$ sehingga diperoleh

$$P(\{x_n\} + \{y_n\}) = P(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$$

$$= (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$$

$$= (0 + 0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$$

$$= (0, x_2, x_3, \dots) + (0, y_2, y_3, \dots)$$

$$= P(x_1, x_2, x_3, \dots) + \square P(y_1, y_2, y_3, \dots)$$

$$= P(\boldsymbol{u}) + P(\boldsymbol{v}).$$

Jika k adalah skalar atas lapangan real $\mathbb{R}$ maka berlaku $k\{x_n\} = k(x_1, x_2, x_3, \dots) = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots)$ sehingga diperoleh

$$P(\{kx_n\}) = P(kx_1, kx_2, kx_3, \dots)$$

$$= (k0, kx_2, \square x_3, \dots)$$

$$= k(0, x_2, x_3, \dots) = kP(\{x_n\}).$$

Jadi, P merupakan suatu transformasi linear dan P merupakan operator linear karena memetakan suatu ruang vektor ℓ^2 ke dirinya sendiri. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa P merupakan suatu proyeksi ortogonal. Berdasarkan Teorema 2.11, suatu proyeksi ortogonal memiliki sifat idempoten dan simetri. Untuk setiap $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ maka berlaku $P(\{x_n\}) = P(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P\big(P(\{x_n\})\big) &= P\big(P(x_1, x_2, x_3, \dots)\big) \\ &= P(0, x_2, x_3, \dots) \\ &= (0, x_2, x_3, \dots) = P(\{x_n\}), \end{aligned}$$

sehingga P idempoten. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa P simetri. Misalkan $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $\{y_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ vektor-vektor di ℓ^2 maka berdasarkan definisi berlaku $P(\{x_n\}) = P(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$ dan $P(\{y_n\}) = P(y_1, y_2, y_3, \dots) = (0, y_2, y_3, \dots)$ sehingga diperoleh suatu *pre-*Hilbert

$$\begin{aligned} \langle P(\{x_n\}), \{y_n\} \rangle &= \langle P(x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots) \rangle \\ &= \langle (0, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots) \rangle = x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots, \end{aligned} \tag{2.51}$$

dan

$$\begin{aligned} \langle \{x_n\}, P(\{y_n\}) \rangle &= \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), P(y_1, y_2, y_3, \dots) \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), (0, y_2, y_3, \dots) \rangle = x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Dari persamaan (2.51) dan (2.52) menunjukkan bahwa P simetri. Oleh karena itu, operator linear P adalah suatu proyeksi ortogonal.

G. Kekonvergenan dan kelengkapan

Salah satu cara untuk menjelaskan sifat kelengkapan adalah dengan mengasumsikan bahwa masing-masing himpunan bagian tak kosong yang terbatas pada $\mathbb{R}$ memiliki supremum. Untuk memahami definisi dari supremum, sebelumnya akan dijelaskan definisi dari himpunan terbatas atas, himpunan terbatas bawah, serta himpunan terbatas dan tidak terbatas seperti berikut ini.

Definisi 2.33: (Bartle & Sherbert, 1927:

Misalkan S adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$, maka berlaku

a. Himpunan S dikatakan terbatas atas jika terdapat suatu bilangan $u \in \mathbb{R}$ sedemikain sehingga $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$. Masing-masing bilangan u dinamakan batas atas pada S.
b. Himpunan S dikatakan terbatas bawah jika terdapat suatu bilangan $w \in \mathbb{R}$ sedemikain sehingga $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Masing-masing bilangan w dinamakan batas atas pada S.
c. Suatu himpunan S dikatakan terbatas jika S terbatas atas dan terbatas bawah. Himpunan S dikatakan tidak terbatas jika S tidak terbatas atas dan terbatas bawah

Definisi 2.34: (Bartle & Sherbert, 1927: 35)

Misalkan S adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$. Jika S terbatas atas maka suatu $u \in \mathbb{R}$ dinamakan supremum dari S atau $Sup\ u$ jika memenuhi ketentuan berikut:

a. u adalah batas atas dari S
b. Jika v sebarang batas atas dari S maka $u \leq v$

Berikut ini akan dijelaskan mengenai lemma yang berkaitan dengan definisi supremum di atas.

Lemma 2.1 : (Bartle & Sherbert, 1927: 53)

Misalkan $u \in \mathbb{R}$ maka u dinamakan supremum dari himpunan bagian tak kosong S pada $\mathbb{R}$ jika hanya jika berlaku $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$.

Bukti :

($\Longrightarrow$)

Misalkan u adalah supremum dari S maka berlaku bahwa u adalah batas atas dari S. Jika terdapat $u \in \mathbb{R}$ maka berlaku bahwa $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$.

($\Longleftarrow$)

Sebaliknya, jika terdapat $u \in \mathbb{R}$ maka berlaku $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$ dan s bukan merupakan suatu batas atas dari S. Misalkan s sebarang batas bawah maka u juga merupakan batas bawah dari S sedemikian sehingga jika $u \in \mathbb{R}$ maka berlaku $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$. Hasil di atas kontradiksi, sehingga harus pernyataan harus dibalik yaitu u adalah supremum dari S. ■

Konsep terpenting dalam suatu barisan adalah kekonvergenan. Berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi kekonvergenan suatu barisan.

Definisi 3.35: (Varberg & Purcell, 2001: 97)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ dan c titik limit dari A. Suatu pemetaan $f: A \to \mathbb{R}$ dan $L \in \mathbb{R}$ maka L dinamakan limit fungsi f di c, dinotasikan $lim_{x \to c} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$ dengan $x \in A$ maka berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definisi 2.35: (Bartle & Sherbert, 1927: 54)

Suatu barisan bilangan real $\{x_n\}$ dikatakan konvergen jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n > n_0$ maka jika terdapat suatu $x \in \mathbb{R}$ berlaku $|\{x_n\} - x| \leq \varepsilon$. Jika x adalah limit dari barisan $\{x_n\}$ maka $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke x atau dinotasikan dengan $\lim_{n \to \infty} \{x_n\} = x$.

Dengan demikian jika suatu barisan memiliki limit dinamakan barisan konvergen. Sebaliknya, jika barisan tersebut tidak memiliki limit dinamakan barisan divergen.

Contoh 2.16:

Akan dibuktikan bahwa $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$ merupakan barisan yang konvergen dalam $\mathbb{R}$.

Penyelesaian :

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Jika $n > n_0$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, sehingga diperoleh

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Oleh karena itu, barisan $(\frac{1}{n})$ konvergen ke 0 dalam $\mathbb{R}$.

Untuk membuktikan bahwa suatu barisan merupakan barisan konvergen memerlukan definisi yang dapat digunakan untuk mengetahuinya, minimal dengan perkiraan limit. Definisi tersebut berguna untuk mengukur kekonvergenan jika limit tidak dapat diperkirakan. Pengukuran yang dimaksud adalah pengukuran Cauchy untuk suatu barisan.

Definisi 2.36: (Bartle & Sherbert, 1927: 82)

Suatu barisan bilangan real $\{(x_n)\}$ dinamakan suatu barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m > n_0$, maka berlaku $|\{x_n\} - \{x_m\}| \leq \varepsilon$. Dinotasikan dengan $\lim_{n,m\to\infty} |\{x_n\} - \{x_m\}| = 0$.

Berikut ini akan dijelaskan mengenai contoh dari barisan Cauchy.

Contoh 2.17:

Misalkan $\{x_n\} = \left(\frac{1}{n}\right)$ suatu barisan, akan ditunjukkan bahwa $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy.

Penyelesaian :

Misalkan $\{x_n\} = \left(\frac{1}{n}\right)$ adalah suatu barisan. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ dan berlaku $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, karena $n, m > n_0$ diperoleh

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{dan} \qquad \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Oleh karena itu,

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi, barisan $\{x_n\} = \left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Di dalam kekonvergenan suatu barisan, akan dijelaskan juga mengenai kekonvergenan seragam yaitu kekonvergenan suatu barisan yang dihubungakan dengan suatu norma. Misalkan pemetaan $f: A \to \mathbb{R}$ dengan f pada A maka norma $\|f\|_A < \varepsilon$ akan setara dengan $|f(t)| < \varepsilon$, dengan $t \in A$. Berikut ini akan dijelaskan mengenai kekonvergenan barisan dengan menggunakan norma seragam.

Teorema 2.14: (Wiedmann, 1980 : 15)

Misalkan suatu barisan fungsi $\{f_n\}$ terbatas pada A untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke suatu fungsi terbatas f pada A jika hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m > n_0$, maka berlaku $\|\{f_n\} - \{f_m\}\| \leq \varepsilon$.

Bukti :

$(\Longrightarrow)$

Misalkan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada A. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka untuk $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m > n_0$, maka berlaku $\|\{f_n\} - f\|_A \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Berdasarkan ketaksamaan segitiga maka untuk setiap $t \in A$ diperoleh

$$|\{f_n\}(t) - \{f_m\}(t)| \leq |\{f_n\}(t) - f(t)| + |\{f_m\}(t) - f(t)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Oleh karena itu, $|\{f_n\}(t) - \{f_m\}(t)| \leq \varepsilon$ sehingga terbukti bahwa $\|\{f_n\} - \{f_m\}\| \leq \varepsilon$.

($\Leftarrow$)

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m > n_0$, maka berlaku $\|\{f_n\} - \{f_m\}\|_A \leq \varepsilon$ maka untuk setiap $t \in A$ berlaku

$$|\{f_n\}(t) - \{f_m\}(t)| \leq \|\{f_n\} - \{f_m\}\|_A \leq \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(\{f_n\}(t))$ merupakan barisan Cauchy di A sehingga $\{f_n\}$ merupakan barisan konvergen ke suatu $f(t)$ untuk setiap $t \in A$ maka diperoleh

$$|\{f_n\}(t) - f(t)| = \lim_{m\to\infty} |\{f_n\}(t) - \{f_m\}(t)| = 0 \leq \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke suatu fungsi terbatas f pada A. ■

Berikut ini aka dijelaskan mengenai definisi dari suatu barisan konvergen dan barisan Cauchy dalam suatu ruang *pre*-Hilbert.

Definisi 2.19 : (Wiedmann, 1980 : 15)

Suatu barisan $\{x_n\}$ dalam ruang *inner product* X dikatakan konvergen jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n > n_0$ maka jika terdapat suatu $\boldsymbol{x} \in X$ berlaku $\|\{x_n\} - \boldsymbol{x}\| \leq \varepsilon$ atau $\lim_{n\to\infty} \|\{x_n\} - \boldsymbol{x}\| = 0$.

Definisi 2.20 : (Wiedmann, 1980 : 15)

Suatu barisan $\{x_n\}$ dalam ruang *inner product* X dinamakan suatu barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m > n_0$, maka berlaku $\|\{x_n\} - \{x_m\}\| \leq \varepsilon$. Dinotasikan dengan $\lim_{m,n\to\infty} \|\{x_n\} - \{x_m\}\| = 0$.

Berikut ini akan dijelaskan mengenai proposisi dari suatu barisan Cauchy pada ruang *pre*-Hilbert.

Proposisi 2.5: (Wiedmann, 1980: 16)

Misalkan $\{x_n\}$ suatu barisan pada ruang *pre*-Hilbert X, maka berlaku:

a. Jika $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy, maka barisan $\{\|\{x_n\}\|\}$ konvergen.
b. Jika X adalah ruang *pre*-Hilbert dan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ adalah barisan Cauchy, maka barisan $\{\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle\}$ adalah konvergen.

Bukti :

a. Misalkan $\{x_n\}$ barisan Cauchy maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m > n_0$, maka berlaku $\|\{x_n\} - \{x_m\}\| \leq \varepsilon$ sehingga diperoleh bahwa

$$\|\{x_n\} - \{x_m\}\|^2 = \langle\{x_n\} - \{x_m\}, \{x_n\} - \{x_m\}\rangle$$

$$= \langle\{x_n\}, \{x_n\} - \{x_m\}\rangle - \langle\{x_m\}, \{x_n\} - \{x_m\}\rangle$$ (Definisi 2.25 aksioma c)

$$= \langle\{x_n\}, \{x_n\}\rangle + \langle\{x_m\}, \{x_m\}\rangle - \langle\{x_n\}, \{x_m\}\rangle - \langle\{x_m\}, \{x_n\}\rangle$$ (Definisi 2.25 aksioma c)

$$= \|\{x_n\}\|^2 + \|\{x_m\}\|^2 - \langle\{x_n\},\{x_m\}\rangle - \langle\{x_m\},\{x_n\}\rangle$$

$$= \|\{x_n\}\|^2 + \|\{x_m\}\|^2 - 2\langle\{x_n\},\{x_m\}\rangle$$

$$= \|\{x_n\}\|^2 + \|\{x_m\}\|^2 - 2|\langle\{x_n\},\{x_m\}\rangle|$$

$$\geq \|\{x_n\}\|^2 + \|\{x_m\}\|^2 - 2\|\{x_n\}\|\|\{x_m\}\|$$ (ketaksamaan Cauchy-Schwarz)

$$= |\|\{x_n\}\| - \|\{x_m\}\||^2,$$

sehingga $\|\{x_n\}\| - \|\{x_m\}\| \leq \|\{x_n\} - \{x_m\}\| \leq \varepsilon$. Oleh karena itu, barisan $\{\|\{x_n\}\|\}$ adalah barisan Cauchy yang konvergen.

b. Oleh (a) terdapat suatu $c > 0$ dengan $c \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\|\{x_n\}\| \leq c$ dan $\|\{y_m\}\| \leq c$ untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$. Jika

$$|\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle - \langle(x_m),(y_m)\rangle|$$

$$= |\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle - \langle\{x_n\},\{y_m\}\rangle + \langle\{x_n\},\{y_m\}\rangle - \langle\{x_m\},\{y_m\}\rangle|$$

$$= |\langle\{x_n\},\{y_n\} - \{y_m\}\rangle + \langle\{x_n\} - \{x_m\},\{y_m\}\rangle|$$ (Defini 2.25 aksioma c)

dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$\leq \|\{x_n\}\|\|\{y_n\} - \{y_m\}\| + \|\{x_n\} - \{x_m\}\|\|\{y_m\}\| \leq \varepsilon$$

atau

$$\leq c\{\|\{y_n\} - \{y_m\}\| + \|\{x_n\} - \{x_m\}\|\} \leq \varepsilon.$$

Artinya, bahwa $\lim_{m,n\to\infty} \|\{y_n\} - \{y_m\}\| + \lim_{m,n\to\infty} \|\{x_n\} - \{x_m\}\| = 0 + 0 = 0$, sehingga barisan $\{\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle\}$ konvergen. ■

Berikut ini adalah Lemma yang menjelaskan tentang hubungan kekonvergenan antara barisan yang satu dengan yang lainnya terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar.

Lemma 2.2 : (Berberian, 1961: 64)

Di dalam suatu ruang *pre*-Hilbert berlaku:

a. Jika $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \boldsymbol{x}$ dan $\lim_{n\to\infty}\{y_n\} = \boldsymbol{y}$, maka $\lim_{n\to\infty}(\{x_n\} + \{y_n\}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.

b. Jika $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \boldsymbol{x}$ dan $\lim_{n\to\infty}\{\alpha_n\} = \alpha$, maka $\lim_{n\to\infty}\{\alpha_n\}\{x_n\} = \alpha\boldsymbol{x}$.

Bukti :

a. Akan dibuktikan bahwa jika $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \boldsymbol{x}$ dan $\lim_{n\to\infty}\{y_n\} = \boldsymbol{y}$, maka $\lim_{n\to\infty}(\{x_n\} + \{y_n\}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$. Misalkan $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \boldsymbol{x}$ dan $\lim_{n\to\infty}\{y_n\} = \boldsymbol{y}$ maka berlaku $\lim_{n\to\infty}\|\{x_n\} - \boldsymbol{x}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|\{y_n\} - \boldsymbol{y}\| = 0$. Berdasarkan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|(\{x_n\} + \{y_n\}) - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\| &= \lim_{n\to\infty}\|(\{x_n\} - \boldsymbol{x}) + (\{y_n\} - \boldsymbol{y})\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\|\{x_n\} - \boldsymbol{x}\| + \lim_{n\to\infty}\|\{y_n\} - \boldsymbol{y}\| \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\lim_{n\to\infty} \|(\{x_n\} + \{y_n\}) - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\| = 0$ sehingga terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty}(\{x_n\} + \{y_n\}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.

b. Akan dibuktikan bahwa jika $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \boldsymbol{x}$ dan $\lim_{n\to\infty}\{\alpha_n\} = \alpha$, maka $\lim_{n\to\infty}\{\alpha_n\}\{x_n\} = \alpha\boldsymbol{x}$. Misalkan $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \boldsymbol{x}$ dan $\lim_{n\to\infty}\{\alpha_n\} = \alpha$ maka berlaku bahwa $\lim_{n\to\infty}\|\{x_n\} - \boldsymbol{x}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}|\{\alpha_n\} - \alpha| = 0$.

Berdasarkan ketaksamaan segitiga berlaku

$$\lim_{n\to\infty}\|\{\alpha_n\}\{x_n\} - \alpha\boldsymbol{x}\|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\|(\{\alpha_n\} - \alpha)(\{x_n\} - \boldsymbol{x}) + (\{x_n\} - \boldsymbol{x})\alpha + (\{\alpha_n\} - \alpha)\boldsymbol{x}\|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}|\{\alpha_n\} - \alpha|\|\{x_n\} - \boldsymbol{x}\| + |\alpha| \lim_{n\to\infty}\|\{x_n\} - \boldsymbol{x}\|$$

$$+\|\boldsymbol{x}\| \lim_{n\to\infty}|\{\alpha_n\} - \alpha|$$

$$= 0.0 + |\alpha|.0 + \|\boldsymbol{x}\|.0 = 0.$$

Oleh karena itu, $\lim_{n\to\infty}\|\{\alpha_n\}\{x_n\} - \alpha\boldsymbol{x}\| = 0$ sehingga berlaku $\lim_{n\to\infty}\{\alpha_n\}\{x_n\} = \alpha\boldsymbol{x}$. ■

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibicarakan bagian pokok dari penulisan, yaitu proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert. Namun, sebelumnya akan dijelaskan terlebih dahulu tentang definisi dari ruang Hilbert serta sifat-sifat yang dimiliki oleh ruang Hilbert yang berhubungan dengan proyeksi ortogonal.

A. Ruang Hilbert

Misalkan X dan Y masing-masing adalah ruang *pre*-Hilbert dan memiliki sifat yaitu lengkap (*complete*) dan tidak lengkap (*incomplete*), secara berturut-turut. Ruang *pre*-Hilbert X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di dalamnya merupakan barisan konvergen. Artinya, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu n_0 elemen bilangan asli $\mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n \geq n_0$, maka terdapat suatu vektor $\boldsymbol{x}$ sedemikian sehingga $\|\{x_n\} - \boldsymbol{x}\| \leq \varepsilon$ atau $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \boldsymbol{x}$. Sedangkan, ruang *pre*-Hilbert Y dikatakan tidak lengkap jika terdapat barisan Cauchy $\{x_n\}$ di dalamnya yang tidak merupakan barisan konvergen.

Definisi 3.1 : (Debnath, 1999 : 92)

Suatu ruang *pre*-Hilbert yang lengkap dinamakan ruang Hilbert.

Untuk lebih memahami pengertian ruang Hilbert, dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 3.1:

Berdasarkan Contoh 2.14, ℓ^2 adalah suatu ruang *pre*-Hilbert. Akan ditunjukkan bahwa ℓ^2 adalah ruang Hilbert.

Penyelesaian :

Diketahui bahwa ℓ^2 adalah ruang *pre*-Hilbert (berdasarkan Contoh 2.). Akan ditunjukkan bahwa ruang *pre*-Hilbert ℓ^2 adalah ruang Hilbert dengan *inner product* didefinisikan oleh

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n\}\{\beta_n\},$$

untuk setiap $\boldsymbol{x} = \{\alpha_n\}$ dan $\boldsymbol{y} = \{\beta_n\}$ berada dalam ℓ^2. Selanjutnya, berkaitan dengan *inner product* dapat dinyatakan suatu norma

$$\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2 \right)^{1/2}.$$

Ambil sebarang barisan Cauchy $\{\alpha_n\}$ dalam ℓ^2, ditulis $\{\alpha_n\} = (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots)$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m \geq n_0$ dan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ maka berlaku

$$\|\{\alpha_n\} - \{\alpha_m\}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\{\alpha_{nk}\} - \{\alpha_{mk}\}|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Jika kedua ruas dikuadratkan, maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\{\alpha_{nk}\} - \{\alpha_{mk}\}|^2 < \varepsilon^2. \tag{3.1}$$

Dari persamaan (3.1) berakibat bahwa untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m \geq n_0$ sedemikian sehingga

$$|\{\alpha_{nk}\} - \{\alpha_{mk}\}| < \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap k barisan $\{\alpha_n\}$ adalah suatu barisan Cauchy yang konvergen. Oleh karena itu, diperoleh bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \{\alpha_{nk}\} = \alpha_k\,, k = 1, 2, \ldots \text{ dan } \{\alpha_k\} = \alpha.$$

Untuk membuktikan bahwa barisan $\{\alpha_n\}$ konvergen ke α anggota ℓ^2, maka dari persamaan (3.1) dengan memisalkan m menuju ∞ dan untuk setiap $n \geq n_0$ diperoleh bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\{a_{nk}\} - \{\alpha_k\}|^2 \leq \varepsilon^2 \tag{3.2}$$

dan jika ambil sebarang

$$\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left|\{\alpha_{n_0 k}\}\right|^2 < \infty \text{ dalam } \ell^2,$$

maka dengan ketaksamaan Minkowski, diperoleh

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\{\alpha_k\}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(|\{\alpha_k\}| - \left|\{\alpha_{n_o k}\}\right| + \left|\{\alpha_{n_o k}\}\right|\right)^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(|\{\alpha_k\}| - \left|\{\alpha_{n_0 k}\}\right|\right)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\{\alpha_{n_0 k}\}\right|^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\{\alpha_k\} - \{\alpha_{n_0 k}\}\right|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\{\alpha_{n_0 k}\}\right|^2} < \infty \,.$$

Hasil di atas membuktikan bahwa barisan $\{\alpha_k\} = \alpha$ adalah suatu anggota ℓ^2. Oleh karena itu, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, dari persamaan (3.2) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \|\{\alpha_n\} - \alpha\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (|\{\alpha_{nk}\} - \{\alpha_k\}|)^2} = 0.$$

Artinya, bahwa barisan $\{\alpha_n\}$ adalah konvergen ke α anggota ℓ^2 sehingga terbukti bahwa ℓ^2 adalah lengkap. Oleh karena itu, ruang *pre*-Hilbert ℓ^2 merupakan ruang Hilbert.

Selanjutnya, seperti halnya ruang vektor, ruang Hilbert pun memiliki suatu subruang. Di dalam suatu ruang Hilbert, subruang yang berlaku adalah subruang tertutup. Berikut ini akan dijelaskan mengenai definisi dari subruang tertutup pada ruang Hilbert.

Definisi 3.3: (Kreyszig, 1978: 140)

Misalkan Y suatu himpunan bagian tertutup pada ruang Hilbert H dinamakan subruang tertutup pada H jika Y itu sendiri dipandang sebagai ruang *pre*-Hilbert dan memenuhi sifat kelengkapan pada H.

Untuk lebih memahami konsep dari subruang pada ruang Hilbert, berikut ini akan dijelaskan teorema yang berlaku pada suatu subruang pada ruang Hilbert.

Teorema 3.1: (Kreyszig, 1978: 140)

Misalkan Y adalah subruang pada ruang Hilbert H, maka Y adalah lengkap jika dan hanya jika Y tertutup dalam H.

Bukti

($\Longrightarrow$)

Misalkan Y adalah subruang pada ruang Hilbert H dan Y adalah lengkap , maka akan dibuktikan bahwa Y merupakan subruang tertutup. Misalkan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Y$ dan suatu skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Ambil barisan $\{x_n\}, \{y_n\} \in Y$ dan subruang Y lengkap maka berlaku $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \boldsymbol{x}$ dan $\lim_{n\to\infty}\{y_n\} = \boldsymbol{y}$ artinya barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ konvergen ke $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 2.1 berlaku penjumlahan $\lim_{n\to\infty}(\{x_n\} + \{y_n\}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ dan $\lim_{n\to\infty}\{\alpha_n\}\,\{x_n\} = \alpha\boldsymbol{x}$. Artinya, $(\{x_n\} + \{y_n\}) \in Y$ maka $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in Y$ dan $\{\alpha_n\}\,\{x_n\} \in Y$ maka $\alpha\boldsymbol{x} \in Y$, sehingga $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ dan $\alpha\boldsymbol{x}$ termasuk dalam Y. Hal ini membuktikan bahwa Y merupakan subruang tertutup.

($\Longleftarrow$)

Misalkan Y adalah subruang pada ruang Hilbert H dan Y merupakan subruang tertutup, maka akan dibuktikan bahwa Y lengkap. Misalkan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Y$ dan suatu skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, Y merupakan subruang tertutup maka $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in Y$ dan $\alpha\boldsymbol{x} \in Y$. Jika terdapat barisan $\{x_n\}, \{y_n\} \in Y$ dan suatu skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, maka berlaku pula $(\{x_n\} + \{y_n\}) \in Y$ dan $\{\alpha_n\}\{\,x_n\} \in Y$. Lemma 2.1 berlaku $\lim_{n\to\infty}(\{x_n\} + \{y_n\}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ dan untuk skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku $\lim_{n\to\infty}\{\alpha_n\}\,\{x_n\} = \alpha\boldsymbol{x}$.

Artinya, jumlah dari dua barisan $(\{x_n\} + \{y_n\})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ dan $\{\alpha_n\}\,\{x_n\}$ konvergen ke $\alpha\boldsymbol{x}$ sehingga keduanya lengkap. ■

Pada bab sebelumnya telah dipelajari mengenai transformasi linear pada ruang vektor, yang menggunakan operasi pada ruang vektor, yaitu operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Berikut ini akan dijelaskan mengenai operator linear dari ruang Hilbert ke dalam ruang Hilbert lainnya.

Definisi 3.4 : (Wiedmann, 1980: 50)

Misalkan suatu operator linear $P: H \to H$ dengan H ruang Hilbert dan $\mathbb{R}$ adalah skalar memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

a. $P(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = P(\boldsymbol{x}) + P(\boldsymbol{y})$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$;
b. $P(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha P(\boldsymbol{x})$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Untuk lebih memahami operator linear pada ruang Hilbert, berikut ini akan dijelaskan contoh dari operator linear di ruang Hilbert.

Contoh 3.3 :

Misalkan ℓ^2 adalah ruang Hilbert (berdasarkan Contoh 3.1). Akan ditunjukkan bahwa $P: \ell^2 \to \ell^2$ yang didefinisikan oleh

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

adalah suatu operator linear pada ruang Hilbert.

Penyelesaian :

Misalkan $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots), \{y_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$ berlaku

$P(\{x_n\}) = P(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $P(\{y_n\}) = P(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} P(\{x_n\} + \{y_n\}) &= P(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots) \\ &= P(x_1, x_2, x_3, \dots) + P(y_1, y_2, y_3, \dots) \\ &= P(\{x_n\}) + P(\{y_n\}). \end{aligned}$$

Selanjutnya, jika $k \in \mathbb{R}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} P(\{kx_n\}) = P(kx_1, kx_2, kx_3, \dots) &= (kx_1, kx_2, kx_3, \dots) \\ &= k(x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= kP(\{x_n\}) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $P: \ell^2 \to \ell^2$ adalah suatu operator linear pada ruang Hilbert.

Berikut ini adalah definisi range dan kernel dari suatu operator linear pada ruang Hilbert.

Definisi 3.5 : (Wiedmann, 1980: 50)

Misalkan $P: H_1 \to H_2$ adalah suatu operator linear terbatas dengan $H_1 = H_2 = H$ ruang Hilbert, maka yang dinamakan ruang null (kernel) dari P didefinisikan dengan

$$\ker(\mathrm{P}) = \{\boldsymbol{x} \in H_1 | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}, \text{dengan } \boldsymbol{\theta} \in H_2\}.$$

Sedangkan, range dari P didefinisikan dengan

$$\mathrm{range}(P) = \{\boldsymbol{y} \in H_2 | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}, \text{dengan } \boldsymbol{x} \in H_1\}.$$

Operator linear pada ruang Hilbert terdiri dari dua macam, yaitu operator linear terbatas dan operator linear tidak terbatas. Berikut ini akan dijelaskan definisi dari operator linear terbatas pada ruang Hilbert yang berguna untuk menjelasan subbab berikutnya.

Definisi 3.6: (Wiedmann, 1980: 53)

Misalkan H suatu ruang Hilbert, maka operator linear $P: H \to H$ dinamakan operator linear terbatas jika terdapat konstanta $c \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ berlaku

$$\|P(\boldsymbol{x})\| \leq c\|\boldsymbol{x}\|. \tag{3.9}$$

Dari definisi di atas, diperoleh suatu lemma tentang norma dari suatu operator linear terbatas seperti berikut ini.

Lemma 3.1: (Kreyszig, 1978: 92)

Misalkan $P: H \to H$ adalah suatu operator linear terbatas pada ruang Hilbert H maka untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ berlaku norma dari operator linear linear terbatas

$$\|P\| = \underset{\|x\|=1}{Sup}\|P(\boldsymbol{x})\|. \tag{3.10}$$

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{x} \in H$ maka berdasarkan Definisi 3.6 berlaku $\|P(\boldsymbol{x})\| \leq c\|\boldsymbol{x}\|$ sehingga diperoleh

$$\frac{\|P(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq c.$$

Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.34 berlaku bahwa

$$c = \sup_{x \neq 0} \frac{\|P(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

Di lain pihak, $\|P(\boldsymbol{x})\| \leq \|P\|\|\boldsymbol{x}\|$ maka berlaku pula

$$\|P\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|P(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \sup_{\|x\|=1} \|P(\boldsymbol{x})\|.$$

Jadi, lemma dari norma suatu operator linear terbatas terbukti. ■

Berikut ini adalah contoh dari operator linear linear terbatas pada ruang Hilbert.

Contoh 3.4 :

Misalkan ℓ^2 adalah suatu ruang Hilbert (Berdasarkan Contoh 3.1), suatu pemetaan $P: \ell^2 \to \ell^2$ didefinisikan oleh

$$P(x_1, x_2, x_3, \ldots) \to (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

adalah suatu operator linear pada ruang Hilbert. Akan ditunjukkan bahwa operator linear P adalah terbatas.

Penyelesaian :

Misalkan $\ell^2 = \{\boldsymbol{u} = \{x_{\boldsymbol{n}}\} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) | \sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\}|^2 < \infty\}$ dan $P(\boldsymbol{u}) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ dan suatu *inner product* didefinisikan oleh

$$\langle P(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} P(\boldsymbol{u}).\boldsymbol{u}.$$

Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \ell^2$ maka berlaku

$$\|P(\boldsymbol{u})\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} P^2(\boldsymbol{u})}.$$

Untuk membuktikan bahwa P terbatas, misalkan $P = 1$ maka dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$\|P(\boldsymbol{u})\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} P^2(\boldsymbol{u})}$$

$$= \sqrt{(0, x_1, x_2, x_3, \dots)^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \dots}$$

$$\leq \sqrt{0} + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \dots}$$

$$= \|\boldsymbol{u}\|$$

$$= c\|\boldsymbol{u}\|, \text{ dengan } c = 1.$$

Oleh karena itu, operator linear P adalah terbatas.

Di dalam operator linear terbatas pada ruang Hilbert terdapat suatu operator *adjoint*. Berikut ini akan dijelaskan tentang definisi operator *adjoint* pada ruang Hilbert.

Definisi 3.7: (Kreyszig, 1978: 198)

Misalkan suatu operator linear terbatas $: H_1 \to H_2$, dengan $H_1 = H_2 = H$ adalah ruang Hilbert. Operator *adjoint* pada ruang Hilbert P^* pada P didefinisikan oleh

$$P^*: H_2 \to H_1$$

sedemikian sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H_1$ dan $\boldsymbol{y} \in H_2$ maka berlaku $\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, P^*(\boldsymbol{y})\rangle$.

Berkaitan dengan Definisi 3.7, jika suatu operator *adjoint* sama dengan dirinya sendiri maka operator linear terbatas tersebut menjadi operator linear terbatas yang *self-adjoint*. Untuk lebih memahami penjelasan dari operator linear *self-adjoint* dapat dilihat pada definisi berikut.

Definisi 3.8: (Collatz, 1966: 110)

Suatu operator linear terbatas P dinamakan *self-adjoint* jika $P = P^*$.

Oleh karena itu, jika $P = P^*$ maka kondisi pada Definisi 3.5 jika dinyatakan dalam *inner product* menjadi $\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y})\rangle$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$. Penjelasan tersebut seperti terlihat dalam contoh berikut.

Contoh 3.5:

Misalkan suatu operator linear terbatas $P: \ell^2 \to \ell^2$ pada ruang Hilbert yang didefinisikan oleh

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Akan ditunjukkan bahwa P *self-adjoint.*

Penyelesaian :

Misalkan $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots), \{y_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$, maka $P(\{x_n\}) = P\big((x_1, x_2, x_3, \dots)\big) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Operator linear terbatas P *self-adjoint* jika $P = P^*$ sedemikian sehingga berlaku $\langle P(\{x_n\}), \{y_n\}\rangle = \langle \{x_n\}, P^*(\{y_n\})\rangle = \langle \{x_n\}, P(\{y_n\})\rangle$ maka diperoleh

$$\langle P(\{x_n\}), \{y_n\}\rangle = \langle P\big((x_1, x_2, x_3, \dots)\big), (y_1, y_2, y_3, \dots)\rangle$$
$$= \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)\rangle$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots \ , \qquad (3.11)$$

dan misalkan $P^*(\{y_n\}) = P^*\big((y_1, y_2, y_3, \dots)\big) = (z_1, z_2, z_3, \dots)$ maka diperoleh

$$\langle \{x_n\}, P^*(\{y_n\})\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), P^*\big((y_1, y_2, y_3, \dots)\big)\rangle$$
$$= \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), (z_1, z_2, z_3, \dots)\rangle$$
$$= x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 + \cdots \ . \qquad (3.12)$$

Selanjutnya, dari persamaan (3.11) dan (3.12) diperoleh

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots = x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 + \cdots \qquad (3.13)$$

Dari persamaan (3.11) dapat disimpulkan bahwa $y_1 = z_1, y_2 = z_2, y_3 = z_3, \dots$, sehingga

$$P^*\big((y_1, y_2, y_3, \dots)\big) = P(z_1, z_2, z_3, \dots) = P(y_1, y_2, y_3, \dots)$$

Selanjutnya, untuk *inner product* diperoleh

$$\langle \{x_n\}, P(\{y_n\})\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), P\big((y_1, y_2, y_3, \dots)\big)\rangle$$
$$= \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)\rangle$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots \qquad (3.14)$$

Oleh karena itu, dari persamaan (3.11), (3.12), dan (3.14) terbukti bahwa P *self-adjoint*.

Selanjutnya, berikut ini akan dijelaskan suatu lemma yang berkaitan dengan operator *adjoint* pada ruang Hilbert.

Lemma 3.2 : (Kreyszig, 1978 :198)

Misalkan P dan Q adalah operator linear terbatas pada ruang Hilbert H maka berlaku

$$(PQ)^* = Q^*P^*.$$

Bukti :

Misalkan P dan Q adalah operator linear terbatas serta P^* dan Q^* adalah operator *adjoint* pada ruang Hilbert H. Jika P dan Q *self-adjoint* serta $P = PQ$ maka berdasarkan Definisi 3.6 untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ maka berlaku *inner product*

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}, (PQ)^*(\boldsymbol{y})\rangle &= \langle PQ(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, PQ(\boldsymbol{y})\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, P^*Q^*(\boldsymbol{y})\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, Q^*P^*(\boldsymbol{y})\rangle.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa $(PQ)^* = Q^*P^*$. ■

B. Ortogonalitas pada Ruang Hilbert

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan mengenai proyeksi dan sifat-sifat ortogonal pada ruang vektor. Pada bab ini, akan diamati hubungan antara proyeksi dan sifat-sifat ortogonal di ruang Hilbert. Oleh karena itu, akan dijelaskan terlebih dahulu tentang ortogonalitas pada suatu ruang Hilbert.

Definisi 3.9: (Wiedmann, 1980: 29)

Misalkan dua himpunan bagian Y dan Z pada ruang Hilbert H saling ortogonal jika $\boldsymbol{y}$ ortogonal terhadap $\boldsymbol{z}$ atau $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = 0$ untuk setiap $\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z$ dan dinotasikan $Y \perp Z$.

Vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ yang ortogonal dinotasikan dengan $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, dan dibaca $\boldsymbol{x}$ ortogonal pada $\boldsymbol{y}$ atau sebaliknya $\boldsymbol{y}$ ortogonal pada $\boldsymbol{x}$. Menurut definisi di atas, vektor nol ortogonal pada setiap vektor di ruang Hilbert H.

Definisi 3.10: (Kreyszig, 1978: 146)

Misalkan Y adalah subruang tertutup pada suatu ruang Hilbert H, $Y^{\perp}$ dinamakan komplemen ortogonal dari Y pada H dan berlaku

$$Y^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in H | \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0 \text{ untuk setiap } \boldsymbol{y} \in Y\}.$$

Berkaitan dengan subruang pada ruang Hilbert terdapat suatu penggambaran mengenai hubungan dua buah subruang tertutup pada ruang Hilbert, yaitu *direct sum*. Untuk lebih memahami *direct sum* pada ruang Hilbert dapat dilihat pada definisi berikut.

Definisi 3.11: (Kreyszig, 1978: 146)

Misalkan Y dan Z yang merupakan subruang tertutup pada suatu ruang Hilbert H dan $Y \cap Z = \{\boldsymbol{\theta}\}$. Selanjutnya H dinamakan *direct sum* pada Y dan Z jika untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ dan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z$. *Direct sum* dinotasikan dengan

$$H = Y \oplus Z.$$

Dari definisi *direct sum* di atas, Z merupakan subruang pelengkap dari Y dalam H, kemudian Y dan Z disebut pasangan subruang yang saling melengkapi pada H. Berikut ini akan dijelaskan mengenai teorema yang berlaku pada subruang tertutup pada ruang Hilbert yang dinyatakan dengan *direct sum*.

Teorema 3.2: (Berberian, 1961: 61)

Misalkan Y dan Z adalah subruang tertutup pada ruang Hilbert H, maka berlaku $H = Y \oplus Z$, $Z = Y^{\perp}$ sedemikian sehingga Y dan Z saling ortogonal. Untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ dapat dinyatakan secara tunggal yaitu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in Y$ dan $\boldsymbol{z} \in Z = Y^{\perp}$.

Bukti :

Misalkan $H = Y \oplus Z$ maka berlaku bahwa $H = Y + Z$ sehingga dapat dimisalkan $\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{y_2} + \boldsymbol{z_2}$ dengan $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in Y, \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in Z$ maka berlaku

$$\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1}. \tag{3.15}$$

Jika Y dan Z adalah subruang tertutup pada H maka berlaku

$$\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} \in Y \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} \in Z\ , \tag{3.16}$$

dengan $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in Y, \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in Z$ sehingga dari (3.15) diperoleh

$$\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} \in Y \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} \in Z.$$

Oleh karena itu,

$$\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} \in Y \cap Z,$$

karena $Y \cap Z = \{\boldsymbol{\theta}\}$ maka $\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{\theta},$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_2}$ dan $\boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{z_1}$. Oleh karena itu, pernyataan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Z = Y^{\perp}$ bersifat tunggal. ■

Berikut ini adalah lemma yang berkaitan dengan Teorema 3.2 di atas.

Lemma 3.3 : (Kreyszig, 1978: 149)

Jika Y adalah suatu subruang tertutup pada ruang Hilbert H maka

$$Y^{\perp\perp} = Y.$$

Bukti :

(1) Akan dibuktikan bahwa $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$.

Misalkan $Y^{\perp\perp} = \{\boldsymbol{x} \in H | \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle = 0, \text{untuk setiap } \boldsymbol{z} \in Y^{\perp}\}$, ambil sebarang $\boldsymbol{y} \in Y$ maka oleh definisi $Y^{\perp}$ berlaku $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = 0$ untuk setiap $\boldsymbol{z} \in Y^{\perp}$ sehingga $\boldsymbol{y}$ ortogonal ke $Y^{\perp}$ dan $\boldsymbol{y} \in Y^{\perp\perp}$. Oleh karena itu, karena $\boldsymbol{y} \in Y$ dan $\boldsymbol{y} \in Y^{\perp\perp}$ maka

$$Y \subseteq Y^{\perp\perp}. \tag{3.17}$$

(2) Akan dibuktikan bahwa $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$.

Misalkan $\boldsymbol{y} \in Y^{\perp\perp}$ maka berlaku $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{h} \rangle = 0$ untuk setiap $\boldsymbol{h} \in Y^{\perp}$. Berdasarkan Teorema 3.2 $\boldsymbol{y}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{h}$ dengan $\boldsymbol{z} \in Y, \boldsymbol{h} \in Y^{\perp}$ sedemikian sehingga $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{h} \rangle = 0$ berlaku

$$\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{h} \rangle + \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{z} + \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle \text{ (Definisi 2.25 aksioma c)}$$

$$= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{h} \rangle = 0,$$

sehingga $\boldsymbol{h} = 0$. Hal ini menunjukan bahwa $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \in Y$. Oleh karena itu, karena $\boldsymbol{y} \in Y^{\perp\perp}$ dan $\boldsymbol{y} \in Y$ maka

$$Y^{\perp\perp} \subseteq Y. \tag{3.18}$$

Oleh karena itu, dari persamaan (3.17) dan (3.18) maka terbukti bahwa $Y = Y^{\perp\perp}$. ■

Berdasarkan Teorema 3.1 pada subbab sebelumnya, teorema berikut akan menjelaskan mengenai subruang pada ruang Hilbert yang dihubungkan dengan suatu *direct sum*.

Teorema 3.3 : (Berberian, 1961: 66)

Jika Y dan Z adalah subruang lengkap pada suatu ruang Hilbert H dan Y ortogonal ke Z maka *direct sum* $H = Y \oplus Z$ juga merupakan subruang lengkap pada H.

Bukti:

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy dalam $Y + Z$ dan dimisalkan pula $\{x_n\} = (\{y_n\} + \{z_n\})$, dengan $\{y_n\} \in Y$ dan $\{z_n\} \in Z$. Berdasarkan relasi Pythagoras berlaku

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\{y_m\} - \{y_n\}\|^2 + \lim_{m,n\to\infty} \|\{z_m\} - \{z_n\}\|^2$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \|(\{y_m\} - \{y_n\}) + (\{z_m\} - \{z_n\})\|^2$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \|(\{y_m\} + \{z_m\}) - (\{y_n\} + \{z_n\})\|^2$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \|\{x_m\} - \{x_n\}\|^2 = 0,$$

sehingga $\{y_n\}$ adalah barisan Cauchy dalam Y dan $\{z_n\}$ adalah barisan Cauchy dalam Z. Jika Y dan Z lengkap maka berdasarkan Lemma 2.1 $\lim_{n\to\infty}\{y_n\} = \boldsymbol{y}$ dan $\lim_{n\to\infty}\{z_n\} = \boldsymbol{z}$ maka $\lim_{n\to\infty}(\{y_n\} + \{z_n\}) = (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$. Oleh karena itu, $Y \oplus Z$ merupakan subruang tertutup pada H. Berdasarkan Teorema 3.1 maka berlaku bahwa $Y \oplus Z$ subruang lengkap pada H. ■

C. Proyeksi Ortogonal pada Ruang Hilbert $\boldsymbol{\ell^2}$ dan Sifat-sifatnya

Berdasarkan ortogonalitas pada ruang Hilbert, maka dapat dijelaskan mengenai definisi dari suatu proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert. Proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert merupakan suatu operator linear yang dihubungkan dengan suatu *direct sum* dari subruang tertutup pada ruang Hilbert dengan komplemen ortogonalnya sehingga diperoleh suatu definisi proyeksi ortogonal berikut.

Definisi 3.12: (Kreyszig, 1978: 480)

Misalkan Y adalah subruang tertutup pada ruang Hilbert H dan $Y^{\perp}$ adalah komplemen ortogonal dari Y pada H. Suatu operator linear terbatas $P: H \longrightarrow H$ dikatakan proyeksi ortogonal H pada Y sepanjang $Y^{\perp}$ jika berlaku suatu *direct sum* $H = Y \oplus Y^{\perp}$ maka untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ dapat dinyatakan secara tunggal $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ dengan $\boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{z} \in Y^{\perp}$ sehingga berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

Proyeksi ortogonal P pada ruang Hilbert H merupakan kasus khusus dari operator linear terbatas pada ruang Hilbert. Berdasarkan Definisi 3.3 P merupakan proyeksi ortogonal H dan P merupakan pemetaan $P: H \to Y$, $P: Y \to Y$, serta $P: Y^{\perp} \to \{\boldsymbol{\theta}\}$ sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, $P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$, dan $P(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\theta}$ mengakibatkan

$$P^2(\boldsymbol{x}) = P\big(P(\boldsymbol{x})\big) = P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{x}), \tag{3.19}$$

artinya P idempoten atau $P^2 = P$. Selanjutnya, proyeksi ortogonal P juga berlaku suatu *direct sum* $H = Y \oplus Y^{\perp}$, jika $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{z_1}$ dan $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{y_2} + \boldsymbol{z_2}$ dengan $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in Y$ dan $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in Y^{\perp}$ maka ortogonalitas dari Y dan $Y^{\perp}$ mengakibatkan

$$\langle P(\boldsymbol{x_1}), \boldsymbol{x_2}\rangle = \langle \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} + \boldsymbol{z_2}\rangle = \langle \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}\rangle = \langle \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{y_2}\rangle = \langle \boldsymbol{y_1}, P(\boldsymbol{x_2})\rangle. \tag{3.20}$$

Berdasarkan Definisi 3.7 dan Definisi 3.8 persamaan (3.20) menunjukkan bahwa P *self-adjoint*. Oleh karena itu, idempoten dan *self-adjoint* merupakan sifat dari proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert sehingga diperoleh teorema yang akan lebih memperjelas definisi dari proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert.

Teorema 3.4 : (Kreyszig, 1978: 481)

Suatu operator linear terbatas $P: H \to H$ pada ruang Hilbert H dinamakan proyeksi ortogonal jika hanya jika berlaku $P^2 = P$ (idempoten) dan *self-adjoint* yaitu $\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y})\rangle$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$.

Bukti :

Misalkan $P: H \to H$ suatu proyeksi ortogonal, berdasarkan Teorema 3.2 operator linear terbatas $P: H \to H$ suatu proyeksi ortogonal pada suatu subruang tertutup Y sepanjang $Y^{\perp}$ dengan

$$H = \mathrm{Y} \oplus Y^{\perp}.$$

Jika $P^2 = P$ maka $P: H \to H$ bersifat idempoten, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ dan $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \in Y$ diperoleh

$$P^2(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{x}).$$

Selanjutnya, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ dimisalkan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$ dan $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}$ dengan $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1} \in \mathrm{Y}$ dan $\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2} \in Y^{\perp}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle &= \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y})\rangle.\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa operator linear terbatas $P: H \to H$ bersifat *self-adjoint*.

Sebaliknya, misalkan $P: H \to H$ bersifat *self-adjoint* maka untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Y}$ dan $\boldsymbol{y} \in Y^{\perp}$, maka diperoleh

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y})\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}\rangle = 0.$$

Oleh karena itu, $\boldsymbol{x} \in (Y^{\perp})^{\perp}$, sehingga dapat dikatakan bahwa $\mathrm{Y} \subseteq (Y^{\perp})^{\perp}$.

Misalkan $\boldsymbol{y} \in (Y^{\perp})^{\perp}$ maka harus ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{y} \in$ Y, yang berarti bahwa $P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$. Selanjutnya,

$$\|\boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y})\|^2 = \langle \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} - P(\mathrm{S}\boldsymbol{y}) \rangle - \langle P(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) \rangle$$

dengan $\boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) \in Y^{\perp}$. Pada pembuktian pertama sama dengan nol, tetapi juga

$$\langle P(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{y}, P\big(\boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y})\big) \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta} \rangle = 0,$$

sehingga $\boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\theta}$, artinya bahwa $\boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{y}) \in$ Y maka $(Y^{\perp})^{\perp} \subseteq$ Y . Hal ini menyebabkan jika $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{y})$ maka berlaku $P(\boldsymbol{x}) = P\big(P(\boldsymbol{y})\big) = P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}.\blacksquare$

Berikut ini akan dijelaskan mengenai contoh dari suatu proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert yang berkaitan dengan Teorema 3.4 di atas.

Contoh 3.6 :

Misalkan ℓ^2 adalah suatu ruang Hilbert (berdasarkan Contoh 3.1), terdapat suatu operator linear $P: \ell^2 \to \ell^2$ yang didefinisikan oleh

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (0, x_2, x_3, \dots).$$

Akan dibuktikan bahwa jika *P* adalah proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert maka *P* berlaku idempotent dan *self-adjoint*.

Penyelesaian :

Untuk membuktikan bahwa jika *P* adalah proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert, maka berdasarkan Teorema 3.4 berlaku suatu operator linear terbatas yang memiliki sifat idempoten dan *self-adjoint*. Akan dibuktikan bahwa *P* idempoten, untuk setiap $\{x_n\} \in \ell^2$ maka berlaku

$$P\big(P(\{x_n\})\big) = P(0, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots) = P(\{x_n\}).$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa P *self-adjoint*. Misalkan $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^2$ maka berlaku

$$\langle P(\{x_n\}), \{y_n\}\rangle = \langle (0, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)\rangle = x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots \quad (3.21)$$

dan

$$\langle \{x_n\}, P(\{y_n\})\rangle = \langle (x_1,\ {}_2, x_3, \dots), (0, y_2, y_3, \dots)\rangle = x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots \quad (3.22)$$

Persamaan (3.21) dan (3.22) menunjukkan bahwa P *self-adjoint*. Oleh karena itu, P adalah proyeksi orthogonal dan berlaku idempotent dan *self-adjoint*.

Proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert merupakan kasus khusus dari operator linear. Oleh karena itu, proyeksi ortogonal berlaku range dan kernel seperti yang akan dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.6: (Berberian, 1961: 74-75)

Misalkan P adalah proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert H maka berlaku:

a. $\text{Range}(P) = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$
b. $\text{Ker}(P) = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}\}$

Bukti :

a. Berdasarkan definisi range, jika $S = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$ maka $S \subseteq \text{range}(P)$. Selanjutnya, misalkan $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P)$ maka $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{y})$, untuk beberapa $\boldsymbol{y} \in H$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa

$$P(\boldsymbol{x}) = P\big(P(\boldsymbol{y})\big) = P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\text{range}(P) \subseteq S = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$. Oleh karena itu, $\text{range}(P) = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$.

b. Berdasarkan definisi kernel, jika $T = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}\}$ maka $T \subseteq \ker(P)$. Selanjutnya, misalkan $\boldsymbol{x} \in \ker(P)$ maka untuk setiap $\boldsymbol{y} \in H$ diperoleh bahwa

$$\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle = 0,$$

sehingga berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\ker(P) \subseteq T = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}\}$. Oleh karena itu, $\ker(P) = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}\}$. ■

Berikut ini akan dijelaskan mengenai sifat yang berlaku pada proyeksi ortogonal di ruang Hilbert yang berkaitan dengan operator identitas serta hubungan antara range dan kernel.

Teorema 3.5 : (Wiedmann, 1980: 81-82)

Misalkan P adalah proyeksi ortogonal dan I adalah operator identitas pada ruang Hilbert H maka:

a. $I - P$ adalah suatu proyeksi ortogonal
b. $\text{Range}(P) = (\ker(P))^{\perp}$

Bukti :

a. Akan dibuktikan bahwa jika P proyeksi ortogonal maka $I - P$ juga merupakan suatu proyeksi ortogonal, maka harus dibuktikan bahwa $I - P$ idempoten dan *self-adjoint*. Untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ berlaku

$$(I - P)^2(\boldsymbol{x}) = (I - 2P + P^2)(\boldsymbol{x}) = (I - 2P + P)(\boldsymbol{x}) = (I - P)(\boldsymbol{x}).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $I - P$ bersifat idempoten. Selanjutnya, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ dan misalkan $I - P = Q$ berlaku

$$\begin{aligned} \langle (I - P)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle &= \langle Q(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, Q(\boldsymbol{y}) \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, (I - P)(\boldsymbol{y}) \rangle, \end{aligned}$$

sehingga $I - P$ bersifat *self-adjoint*. Oleh karena itu, $I - P$ adalah suatu proyeksi ortogonal.

b. Sekarang misalkan $P^2 = P$□, maka □P adalah suatu proyeksi dan oleh karena itu, akan ditunjukkan bahwa $\text{range}(P) = (\ker(P))^{\perp}$ dan $(\text{range}(P))^{\perp} = \ker(P)$. Misalkan $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P)$ dan $\boldsymbol{y} \in \ker(P)$, maka $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x})$ sehingga

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, 0 \rangle = 0.$$

Oleh karena itu, $\boldsymbol{x} \in (\ker(P))^{\perp}$, sehingga dapat dikatakan bahwa $\text{range}(P) \subseteq (\ker(P))^{\perp}$.

Misalkan $\boldsymbol{y} \in (\ker(P))^{\perp}$ maka harus ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{y} \in \text{range}(P)$, yang berarti bahwa $P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y})\|^2 &= \langle \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) \rangle - \langle P(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) \rangle \end{aligned}$$

dengan $\boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) \in \ker(P)$. Pada pembuktian pertama sama dengan nol, tetapi juga

$$\langle P(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{y}, P\big(\boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y})\big) \rangle = \langle \boldsymbol{y}, 0 \rangle = 0,$$

sehingga $\boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{y}) = 0$, artinya bahwa $\boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{y}) \in \text{range}(P)$ maka $(\ker(P))^{\perp} \subseteq \text{range}(P)$. Oleh karena itu $\text{range}(P) = (\ker(P))^{\perp}$. ■

Berikut akan dijelaskan mengenai contoh dari proyeksi ortogonal yang berkaitan dengan teorema di atas.

Contoh 3.7 :

Misalkan P adalah proyeksi ortogonal dan I adalah operator identitas pada ruang Hilbert ℓ^2 dengan operator linear yang didefinisikan oleh

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (0, x_2, x_3, \dots)$$

dan

$$I(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Akan ditunjukkan bahwa $I - P$ merupakan proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert ℓ^2.

Penyelesaian:

Misalkan $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ maka berlaku

$$I(\{x_n\}) - P(\{x_n\}) = (x_1, x_2, x_3, \dots) - (0, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 0,0, \dots).$$

Akan ditunjukkan bahwa $I - P$ idempoten, jika $Q = I - P$ maka untuk setiap $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ berlaku

$$Q\big(Q(\{x_n\})\big) = Q(x_1, 0,0, \dots) = (x_1, 0,0, \dots) = Q(\{x_n\}).$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $Q = I - P$ *self-adjoint* maka untuk setiap $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots), \{y_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$ berlaku

$$\langle \mathrm{Q}(\{x_n\}), \{y_n\}\rangle = \langle (x_1, 0,0, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)\rangle = x_1 y_1 + 0 + 0 + \cdots \qquad (3.23)$$

dan

$$\langle \{x_n\}, Q(\{y_n\})\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, 0,0 \dots)\rangle = x_1 y_1 + 0 + 0 + \cdots \qquad (3.24)$$

Oleh karena itu, bardasarkan persamaan (3.23) dan (3.24) terbukti bahwa $Q = I - P$ merupakan proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert ℓ^2.

Teorema tersebut mengakibatkan bahwa jika P suatu proyeksi ortogonal, maka range M yang dihubungkan oleh suatu *direct sum* ortogonal $H = M \oplus N$, maka berdasarkan Teorema 3.5 (a) $I - P$ juga merupakan suatu proyeksi ortogonal dengan range N yang dihubungkan oleh suatu *direct sum* ortogonal $H = N \oplus M$. Selanjutnya, dengan mengganti P menjadi $I - P$ diperoleh bahwa

$$\text{range}(I - P) = \big(\ker(I - P)\big)^{\perp} = \ker(P) = \big(\text{range}(P)\big)^{\perp}. \qquad (3.23)$$

Dari pernjelasan di atas, menghasilkan suatu lemma seperti yang akan dijelaskan berikut ini.

Lemma 3.4 : (Taylor & Lay, 1980: 249)

Misalkan P adalah suatu proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert H, maka

$$(\text{range}(P))^{\perp} = \text{range}(I - P).$$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{x} \in (\text{range}(P))^{\perp}$ maka untuk setiap $\boldsymbol{y} \in H$ berlaku

$$\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y})\rangle = 0,$$

sehingga berlaku $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{x} = (I - P)(\boldsymbol{x}) \in \text{range}(I - P)$ maka

$$(\text{range}(P))^{\perp} \subseteq \text{range}(I-P). \tag{3.24}$$

Sebaliknya, misalkan $\boldsymbol{x} \in \text{range}(I-P)$ maka $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = 0$. Oleh karena itu, untuk setiap $\boldsymbol{y} \in H$ berlaku

$$\langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y})\rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle = 0.$$

Dengan demikian, diperoleh $\boldsymbol{x} \in (\text{range}(P))^{\perp}$

$$\text{range}(I-P) \subseteq (\text{range}(P))^{\perp}. \tag{3.25}$$

Jadi, dari (3.24) dan (3.25) terbukti bahwa $(\text{range}(P))^{\perp} = \text{range}(I-P)$. ■

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, proyeksi ortogonal merupakan suatu operator linear terbatas sehingga berdasarkan Lemma 3.1 suatu operator linear memiliki norma, hal itu pula yang berlaku pada proyeksi ortogonal. Berikut ini adalah lemma mengenai norma dari suatu proyeksi ortogonal.

Lemma 3.5 : (Taylor & Lay, 1980: 249)

Suatu proyeksi ortogonal P pada suatu ruang Hilbert H maka berlaku

a. $\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle = \|P(\boldsymbol{x})\|^2$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$
b. $\|P\| = 1$, untuk $P \neq 0$

Bukti :

a. Untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ berlaku bahwa

$$\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle = \langle P^2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{x})\rangle = \|P(\boldsymbol{x})\|^2.$$

b. Diberikan $\boldsymbol{x} \in H$ dan $P(\boldsymbol{x}) \neq 0$, dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy Schwarz maka

$$\|P(\boldsymbol{x})\| = \frac{\|P(\boldsymbol{x})\|^2}{\|P(\boldsymbol{x})\|} = \frac{\langle P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{x})\rangle}{\|P(\boldsymbol{x})\|} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}{\|P(\boldsymbol{x})\|} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{x})\rangle}{\|P(\boldsymbol{x})\|} \leq \|\boldsymbol{x}\|.$$

Oleh karena itu, $\|P(\boldsymbol{x})\| \leq \|\boldsymbol{x}\|$. Hal ini menunjukkan bahwa P terbatas sehingga $\|P\| \leq 1$. Selanjutnya, jika $P(\boldsymbol{x}) \neq 0$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ dan $\|P(P(\boldsymbol{x}))\| = \|P(\boldsymbol{x})\|$ maka berlaku $\|P(P(\boldsymbol{x}))\| = \|P(\boldsymbol{x})\| \leq \|P\|\|P(\boldsymbol{x})\|$, sehingga $\|P\| \geq 1$. Oleh karena itu, $\|P\| = 1$. ■

Berikut ini akan dijelaskan mengenai suatu teorema tentang range dan kernel dari suatu proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert.

Teorema 3.6 : (Wiedmann, 1980: 50)

Misalkan P adalah proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert H maka $\text{range}(P)$ dan $\ker(P)$ subruang tertutup pada H.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa $\text{range}(P)$ dan $\ker(P)$ subruang tertutup pada H, maka harus dibuktikan bahwa $\text{range}(P)$ dan $\ker(P)$ tertutup. Berdasarkan Teorema 3.5 (d) dikatakan bahwa $\text{range}(P) = (\ker(P))^{\perp}$, jika $\boldsymbol{y} \in (\ker(P))^{\perp} = \ker\,(I - P)$ maka $(I - P)(\boldsymbol{y}) = \mathbf{y}$. Akibatnya, $\boldsymbol{y} \in \text{range}(P)$. Oleh karena itu, $\text{range}(P)$ tertutup. Selanjutnya, berdasarkan persamaan (3.23) dikatakan bahwa $\ker(P) = \text{range}(I - P)$. Jika $\boldsymbol{y} \in \ker(P)$ maka $P(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\theta}$. Akibatnya, $\boldsymbol{y} \in \text{range}(I - P)$. Oleh karena itu, $\ker(P)$ juga tertutup. ■

Berdasarkan Definisi 3.9, dua himpunan Y dan Z dalam ruang Hilbert H adalah ortogonal jika $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = 0$ dengan $\boldsymbol{y} \in Y$ dan $\boldsymbol{z} \in Z$. Jika Y dan Z secara berturut-turut merupakan range dan kernel pada proyeksi ortogonal P maka Z merupakan komplemen ortogonal dari Y. Oleh karena itu, range dan kernel pada proyeksi ortogonal P merupakan subruang tertutup pada ruang Hilbert H, sehingga berdasarkan Teorema 3.2 dapat dinyatakan seperti pada teorema berikut.

Teorema 3.7 : (Taylor & Lay, 1980: 249)

Misalkan H adalah suatu ruang Hilbert, pernyataan berikut ini berlaku

a. Jika P adalah suatu proyeksi ortogonal pada H maka berlaku $H = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$ yang merupakan suatu *direct sum* ortogonal.
b. Misalkan H adalah suatu ruang Hilbert dan M adalah subruang tertutup pada H, maka terdapat suatu proyeksi ortogonal tunggal P pada H dengan $\text{range}(P) = M$ dan $\ker(P) = M^{\perp}$.

Bukti :

a. Akan ditunjukkan terlebih dahulu $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P)$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x})$. Misalkan $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x})$ dan $P(\boldsymbol{x})$ suatu proyeksi ortogonal dengan $\boldsymbol{x} \in H$ maka jelas bahwa $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P)$. Kemudian misalkan $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P)$ maka $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x})$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$. Jika $\boldsymbol{x} \in \text{range}(P) \cap \ker(P)$ maka $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x})$ dan $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}$, sehingga $\text{range}(P) \cap \ker(P) = \{\boldsymbol{\theta}\}$. Jika $\boldsymbol{x} \in H$ maka berlaku

$$\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x}) + \big(\boldsymbol{x} - P(\boldsymbol{x})\big),$$

dengan $P(\boldsymbol{x}) \in \text{range}(P)$ dan $\big(\boldsymbol{x} - P(\boldsymbol{x})\big) \in \ker(P)$. Kemudian jika

$$P\big(\boldsymbol{x} - P(\boldsymbol{x})\big) = P(\boldsymbol{x}) - P^2(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{x}) - P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}.$$

Jadi, terbukti bahwa $H = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$. Selanjutnya, jika $\boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{x}) \in \text{range}(P)$ dan $\boldsymbol{z} \in \ker(P)$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ maka

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{z}) \rangle = 0,$$

sehingga $\text{range}(P)$ ortogonal ke $\ker(P)$. Oleh karena itu, H adalah suatu *direct sum* ortogonal pada $\text{range}(P)$ dan $\ker(P)$. Jadi, jika P adalah suatu proyeksi ortogonal pada H maka berlaku $H = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$, berdasarkan Teorema 3.6 $\text{range}(P)$ dan $\ker(P)$ adalah subruang pada H dan keduanya tertutup.

b. Misalkan M adalah subruang tertutup pada H, berdasarkan Teorema 3.3 mengakibatkan bahwa $H = M \oplus M^{\perp}$. Akibatnya, terdapat suatu proyeksi ortogonal P dengan $\text{range}(P) = M$ dan $\ker(P) = \text{range}(I - P) = M^{\perp}$. Untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ diperoleh $\boldsymbol{x} = P(\boldsymbol{x}) + (I - P)(\boldsymbol{x})$ dan $\langle P(\boldsymbol{x}), (I - P)(\boldsymbol{x}) \rangle = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \langle P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{x}) \rangle + \langle (I - P)(\boldsymbol{x}), (I - P)(\boldsymbol{x}) \rangle \\ &= \|P(\boldsymbol{x})\|^2 + \|(I - P)(\boldsymbol{x})\|^2. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\|P(\boldsymbol{x})\| \leq \|\boldsymbol{x}\|$. Hal ini menunjukkan bahwa P terbatas sehingga $\|P\| \leq 1$. Selanjutnya, misalkan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ maka

$$\langle P(\boldsymbol{x}), (I - P)(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle (I - P)(\boldsymbol{x}), (P)(\boldsymbol{y}) \rangle = 0,$$

maka diperoleh

$$\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{y}) + (I - P)(\boldsymbol{y}) \rangle$$

$$= \langle P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{y}) \rangle$$

$$= \langle P(\boldsymbol{x}) + (I - P)(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{y}) \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle.$$

Hai ini menunjukkan bahwa P adalah *self-adjoint* maka P adalah suatu proyeksi ortogonal. Selanjutnya, misalkan Q adalah suatu proyeksi ortogonal pada H dengan $\text{range}(Q) = M$ maka berdasarkan Lemma 3.2 berlaku $\text{range}(I - Q) = (\text{range}(Q))^{\perp} = M^{\perp}$. Akibatnya, dengan sifat ketunggalan dari P diperoleh ⍰ $= Q$. ■

Berikut ini akan dijelaskan mengenai contoh dari proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert ℓ^2 berkaitan dengan Teorema 3.7 di atas.

Contoh 3.8 :

Misalkan P dan Q adalah proyeksi ortogonal pada ℓ^2 sepanjang subruang $\text{range}(P)$ dan $\ker(P)$, berturut-turut yang didefinisikan oleh

$$P(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \dots) \to (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots)$$

dan

$$Q(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \dots) \to (x_1, 0, x_2, x_2, x_3, 2x_3, \dots).$$

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\boldsymbol{x} = (x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \dots) \in \ell^2$ berlaku $P(\boldsymbol{x}) + Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Penyelesaian :

Misalkan $\text{range}(P)$ dan $\ker(P)$ merupakan subruang tertutup pada ruang

Hilbert ℓ^2 maka berdasarkan Teorema 3.3 dan Teorema 3.7 berlaku suatu *direct sum* $H = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$ sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x} = (x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \ldots) \in \ell^2$ dapat dinyatakan secara tunggal $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, dengan $\boldsymbol{y} = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots) \in \text{range}(P)$ dan $\boldsymbol{z} = (x_1, 0, x_2, x_2, x_3, 2x_3, \ldots) \in \ker(P)$ diperoleh

$(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots) + (x_1, 0, x_2, x_2, x_3, 2x_3, \ldots)$.

Jika $Q(\boldsymbol{x}) = Q(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \ldots) = (x_1, 0, x_2, x_2, x_3, 2x_3, \ldots) = \boldsymbol{z}$ dan $P(\boldsymbol{x}) = P(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots) = \boldsymbol{y}$ (berdasarkan Definisi 3.12) maka berlaku

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{x}) + Q(\boldsymbol{x}) &= (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots) + (x_1, 0, x_2, x_2, x_3, 2x_3, \ldots) \\ &= (x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \ldots) \\ &= \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \ell^2$ berlaku $P(\boldsymbol{x}) + Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Berkaitan dengan lemma di atas, berikut ini akan dijelaskan teorema tentang hubungan antar proyeksi ortogonal.

Teorema 3.8 : (Taylor & Lay, 1980: 348)

Misalkan P dan Q merupakan proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert H, maka keempat syarat berikut adalah ekuivalen

a. $\text{Range}(P) \subseteq \text{range}(Q)$
b. $\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle \leq \langle Q(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle$
c. $P = PQ$

d. $P = QP$

Bukti :

a. Misalkan bahwa range$(P) \subseteq$ range (P) maka untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ diperoleh $P(\boldsymbol{x}) \in$ range(P), sehingga berlaku $P(\boldsymbol{x}) = Q\big(P(\boldsymbol{x})\big)$. Hal ini menunjukkan bahwa $P = QP$.

b. Berdasarkan pernyataan (d), akan dibuktikan bahwa (c) berlaku. Misalkan $P = QP$, maka

$$P = P^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ.$$

c. Berdasarkan pernyataan (c), akan dibuktikan bahwa (b) berlaku. Misalkan $P = QP$, dengan menggunakan sifat pada proyeksi ortogonal dan Lemma 3. 5 diperoleh bahwa untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ maka berlaku

$$\begin{aligned}\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle &= \|P(\boldsymbol{x})\|^2 = \|P(Q(\boldsymbol{x}))\|^2 \\ &\leq \|P\|^2\|Q(\boldsymbol{x})\|^2 = \langle Q(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle.\end{aligned}$$

d. Berdasarkan pernyataan (b), akan ditunjukkan bahwa (a) berlaku. Misalkan $\boldsymbol{x} \in$ range(P), maka

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle \leq \langle Q(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle.$$

Selanjutnya, karena $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ maka

$$\|Q(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|,$$

dengan menggunakan relasi Pythagoras diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|P(\boldsymbol{x})\|^2 + \|\boldsymbol{x} - Q(\boldsymbol{x})\|^2,$$

karena $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ maka $\|\boldsymbol{x} - Q(\boldsymbol{x})\|^2 = 0$, sehingga

$$\boldsymbol{x} = Q(\boldsymbol{x}) \in \text{range}(Q).$$

Hal ini menunjukkan bahwa range$(P) \subseteq$ range (Q). ■

Berkaitan dengan teorema di atas, berikut akan dijelaskan mengenai contoh dari proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert ℓ^2.

Contoh 3.9 :

Misalkan P dan Q adalah proyeksi ortogonal pada ℓ^2 sepanjang subruang M dan N, berturut-turut yang didefinisikan oleh

$$P(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \dots) \to (x_1, 0, x_2, x_2, x_3, 2x_3, \dots)$$

dan

$$Q(0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots) \to (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots).$$

Akan ditunjukkan bahwa $M \subseteq N$.

Penyelesaian :

Berdasarkan Teorema 3.8 (d), untuk setiap $\{a_n\} = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \ell^2$ berlaku

$$\begin{aligned} P(\{y_n\}) = Q(P(\{a_n\}) = Q(P(x_1, x_2, x_3, \dots)) &\\ &= Q(0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, \dots) \\ &= (0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, \dots). \end{aligned}$$

Misalkan $(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \dots) \in M$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} P(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \dots) &= Q\big(P(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \dots)\big) \\ &= Q(x_1, 0, x_2, x_2, x_3, 2x_3, \dots) \\ &= (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots) \in N. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa $M \subseteq N$.

Berikut ini akan dijelaskan teorema tentang hubungan dua buah proyeksi ortogonal yang berkaitan dengan kekomutatifan di antara keduanya.

Teorema 3.9: (Heuser,1982: 270-271)

Misalkan P dan Q merupakan proyeksi ortogonal pada subruang tertutup M dan N pada ruang Hilbert H. Maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku

a. Jika P dan Q komutatif maka berdasarkan Teorema 3.8 $PQ = QP = P$ adalah proyeksi ortogonal pada $M \cap N$.

b. Jika $PQ = 0$ maka $QP = 0$, subruang M dan N adalah ortogonal satu sama lain dan $P + Q$ adalah proyeksi ortogonal sepanjang subruang $M \oplus N$.

Bukti :

a. Diketahui bahwa P dan Q adalah proyeksi ortogonal serta keduanya komutatif, maka $PQ = QP = P$ adalah idempoten dan *self-adjoint* yaitu berlaku

$$P^2 = (PQ)(QP) = P^2Q^2 = PQ = P.$$

Untuk setiap $\boldsymbol{x} \in H$ diperoleh bahwa

$$P(\boldsymbol{x}) = P\big(Q(\boldsymbol{x})\big) = Q\big(P(\boldsymbol{x})\big).$$

Jika P dan Q merupakan proyeksi ortogonal pada subruang tertutup M dan N pada ruang Hilbert H maka berlaku bahwa $P\big(Q(\boldsymbol{x})\big) \in M$ dan ⍰$\big(P(\boldsymbol{x})\big) \in N$ sehingga diperoleh $P\big(Q(\boldsymbol{x})\big) = Q\big(P(\boldsymbol{x})\big) = P(\boldsymbol{x}) \in M \cap N$.

b. Diketahui bahwa P dan Q merupakan proyeksi ortogonal maka berlaku bahwa $PQ = P^*Q^* = (QP)^* = 0^* = 0$. Untuk $\boldsymbol{x} \in M$, $\boldsymbol{y} \in N$ maka $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P\big(Q(\boldsymbol{y})\big) \rangle = \langle P(\boldsymbol{x}), Q(\boldsymbol{y}) \rangle = 0$ dengan M dan N adalah ortogonal satu sama lain. P dan Q adalah proyeksi ortogonal, sehingga P dan Q *self-adjoint*. Oleh karena itu, $P + Q$ *self-adjoint* dan $(P + Q)^2 = P^2 + 2PQ + Q^2 = P + Q$ adalah idempotan, dengan $PQ = QP = 0$ maka $P + Q$ adalah suatu proyeksi ortogonal pada $M \oplus N$. ■

Contoh lainnya dari proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert yang berkaitan dengan teorema di atas dapat dilihat seperti dalam contoh berikut.

Contoh 3.10:

Misalkan P dan Q adalah proyeksi ortogonal pada ℓ^2 sepanjang subruang Y dan Z, berturut-turut yang didefinisikan oleh

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (0, x_2, x_3, \dots)$$

dan

$$Q(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Jika $PQ = QP = P$ (berdasarkan Teorema 3.8) maka akan ditunjukkan bahwa $P + Q - PQ$ proyeksi ortogonal pada ℓ^2 sepanjang $Y + Z$.

Penyelesaian :

Misalkan X adalah subruang tertutup pada ℓ^2, maka $X \subset \ell^2$. Jika $U = P + Q$, untuk setiap $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ berlaku

$$\{y_n\} = U(x_1, x_2, x_3, \dots) = P(x_1, x_2, x_3, \dots) + Q(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$= (0, x_2, x_3, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$= (x_1, 2x_2, 2x_3, \dots),$$

dengan $P(x_1, x_2, x_3, \dots) \in Y$ dan $Q(x_1, x_2, x_3, \dots) \in Z$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.9 (b) $\{y_n\} = U(x_1, x_2, x_3, \dots) = P(x_1, x_2, x_3, \dots) + Q(x_1, x_2, x_3, \dots)$ adalah proyeksi ortogonal. Selanjutnya, jika $V = PQ = QP$, untuk setiap $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ berlaku

$$V(x_1, x_2, x_3, \dots) = P\big(Q(x_1, x_2, x_3, \dots)\big) = Q\big(P(x_1, x_2, x_3, \dots)\big)$$

$$= Q(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots),$$

dengan $P\big(Q(x_1, x_2, x_3, \dots)\big) \in Y$ dan $Q\big(P(x_1, x_2, x_3, \dots)\big) \in Z$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.9 (b) $V(x_1, x_2, x_3, \dots) = P\big(Q(x_1, x_2, x_3, \dots)\big) = Q\big(P(x_1, x_2, x_3, \dots)\big)$ adalah proyeksi ortogonal. Selanjutnya, karena U dan V merupakan proyeksi ortogonal maka keduanya idempoten dan *self-adjoint* sehingga $T = U - V$ juga *self-adjoint.* Selanjutnya, akan dibuktikan juga bahwa $T = U - V$ idempoten maka untuk setiap $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ diperoleh

$$(U(\boldsymbol{x}) - V(\boldsymbol{x}))^2 = U^2(\boldsymbol{x}) - U(V(\boldsymbol{x})) - V(U(\boldsymbol{x})) + V^2(\boldsymbol{x})$$

$$= (x_1, 2x_2, 2x_3, \dots)^2 - U(0, x_2, x_3, \dots) - V(x_1, 2x_2, 2x_3, \dots)$$
$$+ (0, x_2, x_3, \dots)$$

$$= (x_1, 2x_2, 2x_3, \dots)^2 - (0, 2x_2, 2x_3, \dots) - (0, 2x_2, 2x_3, \dots)$$
$$+ (0, x_2, x_3, \dots)$$

$$= \big((0, x_2, x_3, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots)\big)^2 - 2(0, 2x_2, 2x_3, \dots)$$
$$+ (0, x_2, x_3, \dots)$$

$$= \left(P(x_1, x_2, x_3, \dots) + Q(x_1, x_2, x_3, \dots)\right)^2 - 2(0, 2x_2, 2x_3, \dots)$$

$$+(0, x_2, x_3, \dots)$$

$$= P^2(x_1, x_2, x_3, \dots) + 2P\left(Q(x_1, x_2, x_3, \dots)\right)$$

$$+Q^2(x_1, x_2, x_3, \dots) - 2(0, 2x_2, 2x_3, \dots) + (0, x_2, x_3, \dots)$$

$$= (0, x_2, x_3, \dots)^2 + 2(0, x_2, x_3, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots)^2$$

$$-2(0, 2x_2, 2x_3, \dots) + (0, x_2, x_3, \dots)$$

$$= (0, x_2, x_3, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots) - (0, x_2, x_3, \dots)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$= U(\boldsymbol{x}) - V(\boldsymbol{x}).$$

Oleh karena itu, $U - V$ idempoten dan *self-adjoint* sehingga $T = U - V = P + Q - PQ$ merupakan proyeksi ortogonal pada ℓ^2 sepanjang $Y + Z$.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Dari permasalahan yang telah dijelaskan pada bab pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert H adalah suatu operator linear terbatas $P: H \to H$ yang memiliki sifat idempoten dan *self-adjoint*. Idempoten artinya jika operator linear tersebut dikalikan dengan dirinya sendiri maka hasilnya adalah operator linear itu sendiri, dinotasikan dengan $P^2 = P$. Sedangkan, *self-adjoint* artinya jika operator linear tersebut dinyatakan dalam suatu *inner product* maka berlaku $\langle P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P(\boldsymbol{y}) \rangle$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$.
2. Proyeksi ortogonal P pada ruang Hilbert H merupakan kasus khusus dari operator linear, sehingga berlaku range dan kernel sebagai berikut:

   $$\text{range}(P) = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$$

   dan

   $$\ker(P) = \{\boldsymbol{x} \in H | P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}\}.$$
3. Range dan kernel dari suatu proyeksi ortogonal P pada ruang Hilbert H merupakan subruang tertutup pada ruang Hilbert, sehingga dapat dinyatakan dalam *direct sum* $H = \text{range}(P) \oplus \ker(P)$.

B. Saran

Permasalahan yang dibahas penulis adalah masalah kajian teoritis tentang proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert. Bagi pembaca yang tertarik untuk melanjutkan kajian teoritis, perlu dikaji lebih lanjut tentang penerapan proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert dalam membicarakan tentang teorema spektral untuk operator linear *self-adjoint*.

DAFTAR PUSTAKA

Achmad Arifin. (2000). *Aljabar*. Bandung : ITB.

_____________. (2001). *Aljabar Linear*. Bandung : ITB.

Anton, Howard. (1978). *Elementary Linear Algebra Seventh Edition*. New York: John Willey & Sons.

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R.(1927). *Introduction to Real Analysis.* New York: John Willey & Sons.

Berberian, Sterling.K. (1961). *Introduction to Hilbert Space*. New York: Oxford University Press.

Debnath, K. & Minkowski, P. (1999). *Introduction to Hilbert Space with Applications Second Edition.* New York: Academic Press.

Friedberg, S.H., Insel, A.J., & Spence, L.E. (1989). *Linear Algebra Second Edition*. New York: Prentice Hall.

Gerber, Harvey. (1990). *Elementary Linear Algebra.* California: Brooks/ Cole Publishing Company.

Kreyszig, Erwin. (1978). *Introductory Functional Analysis with Application*. New York: John Willey & Sons.

Lax, Peter.D. (2002). *Functional Analysis*. New York: John Willey & Sons.

Lipschutz, Seymour. (1087). *Theory and Problem of Linear Algebra SI (Metric) Edition*. Singapore: McGraw-Hill Book.

Parzynski, William R. & Zipse, Phili W. (1987). *Introduction to Mathematical Analysis*. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

Smith, Larry. 1978. *Linear Algebra Third Edition*. New York : Springer-Verlag.

Sukirman. (2006). *Logika dan Himpunan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator.

Taylor, A.E & Lay, D.C. (1980). *Introduction to Functional Analysis Second Edition*. New York: John Willey & Sons.

Webb, T.R.L. (1991). *Functions of Several Real Variable*. London: Ellis Horwood.

Wiedmann, Joachim. (1980). *Linear Operators in Hilbert Spaces*. New York: Springer-Verlag.